AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

HARMONİK ANALİZİN İNTEQRAL ÇEVİRMƏLƏRİNİN BƏZİ XASSƏLƏRİ

İxtisas: 1202.01 - Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Xanım İsaxanovna Öməroğlu**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2023

Dissertasiya işi Xəzər Universitetinin "Riyaziyyat" departamentində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: r.e.d., professor **Rəşid Əvəzağa oğlu Əliyev**

Rəsmi opponentlər:

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent

Rövşən Əlifağa oğlu Bəndəliyev

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent

Cavanşir Cavad oğlu Həsənov

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Çinarə Arif qızı Hacıyeva

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, professor

_______________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.r.e.n.

_______________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, professor

_______________ **Bilal Telman oğlu Bilalov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Dissertasiya işi harmonik analizin əsas inteqral çevirmələrindən olan Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin xassələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Bir çox mexanika və fizika məsələləri xüsusi törəməli diferensial tənliklərə gətirilərək həll olunurlar. Bu xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllini isə çox vaxt potensiallar şəklində axtararaq tapırlar. Burada istifadə olunan potensiallar da əsasən sinqulyar inteqral operatorlar olurlar ki, onların da əsasını adlarını yuxarıda qeyd etdiyimiz inteqral çevirmələri təşkil edir. Bu isə dissertasiya mövzusunun kifayət qədər aktual və praktiki əhəmiyyətə malik olduğunu göstərir.

Alfors-Beurlinq çevirməsi ikidəyişənli kvadratik formanın kanonik şəklə gətirilməsi və kompleks müstəvidə kvazikonform inikasların qurulması məsələləri zamanı yaranmışdır. Belə ki, bu məsələlər Beltrami diferensial tənliklər sisteminə gətirilərək həll edilir. L.Ahlfors göstərmişdir ki, Beltrami diferensial tənliklər sisteminin kompleks müstəvidə Koşi inteqralı şəklində göstərilən həlli var və axtarılan funksiya Alfors-Beurlinq çevirməsi iştirak edən inteqral tənliyin həllidir. Bu inteqral tənliyin həllinin varlığı isə Alfors-Beurlinq çevirməsini müəyyən funksiyalar fəzasında məhdudluğundan və digər xassələrindən asılıdır.

Riss çevirməsi isə Hilbert çevirməsinin çoxölçülü analoqudur və elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qoyulmuş Dirixle məsələsinin və Neyman məsələsinin Furye çevirməsinın tətbiqi ilə həlli zamanı geniş istifadə olunur.

Birölçülü sinqulyar inteqral operator olan Hilbert çevirməsi Furye sıralarının yığılması məsələlərində və analitik funksiyalar üçün Riman və Hilbert sərhəd məsələlərinin həlli zamanı qarşıya çıxmışdır. Kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar fəzasında Hilbert çevirməsinin məhdudluğu D.Hilbert tərəfindən 1905-ci ildə göstərilmişdir. Sonralar, 1922-ci ildə A.Plessner tərəfindən Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalar üçün Hilbert çevirməsinin sanki hər yerdə varlığı isbat olunduqdan sonra, 1928-ci ildə M.Riss tərəfindən Hilbert çevirməsinin L_p, $1 < p < \infty$ fəzasında məhdudluğu isbat edilmişdir. $p = 1$ halında isə Hilbert çevirməsi L_1 fəzasından L_1 fəzasına təsir etmir, daha dəqiq desək, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyanın Hilbert çevirməsi Lebeq mənada inteqrallanan olmaya da bilər. A.Kolmoqorov göstərmişdir ki, $p = 1$ halında Hilbert çevirməsi L_1 fəzasından zəif L_1 fəzasına təsir edir.

1952-ci ildə A.Kalderon və A.Ziqmund çoxölçülü halda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların sinqulyar inteqrallarının sanki hər yerdə varlığını, çoxölçülü sinqulyar inteqral operatorların, o cümlədən Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin L_p, $1 < p < \infty$ fəzalarında məhdudluğunu, $p = 1$ halında isə L_1 fəzasından zəif L_1 fəzasına təsir etdiyini göstərdilər. Sonralar isə R.Hunt, B.Muckenhoupt, R.Wheeden, F.Chiarenza, M.Frasca, J.Peetre, D.R.Adams, R.Coifman, E.Stein, G.Weiss, C.Fefferman, A.Cianchi, E.Nakai, S.Samko, V.Kokilashvilli, R.Banuelos, P.Janakiraman, V.Cruz, X.Tolsa, T.Iwaniec, V.Cruz, J.Mateu, J.Orobitg, E.Doubtsov, A.V.Vasin, O.Dragicevic, H.Kwok-Pun, M.Prats, X.Tolsa, Z.Guo, P.Li, L.Peng, A.V.Vasin və digər tədqiqatçılar sinqulyar inteqral operatorların, o cümlədən Alfors-Beurlinq , Riss və kompleks Riss çevirmələrinin çəkili Lebeq, Orliç, Morri, Sobolev, Besov, Kampanato, Hölder və s. funksional fəzalarda məhdudluğu və digər xassələrini tədqiq etmişlər. Azərbaycan riyaziyyatçılarından bu sahədə A.Ə.Babayev, İ.A.Əliyev, A.C.Hacıyev, S.K.Abdullayev, V.S.Quliyev, R.M.Rzayev, C.H.Həsənov, R.Mustafaev və digər tədqiqatçıların işlərini qeyd etmək olar.

Qeyd etdiyimiz kimi Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələri ümumiyyətlə götürsək Lebeq mənada inteqrallanan olmadıqlarından Lebeq mənada inteqral anlayışından istifadə etməklə L_1 fəzasından olan funksiyaların Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələrini tam tədqiq etmək mümkün deyil. 1929-cu ildə E.Titçmarş tərəfindən Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan Q- və Q'-inteqral anlayışları daxil edildi. E.Titçmarş öz məqaləsində göstərmişdir ki, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Furye sıralarına qoşma triqonometrik sıraları tədqiq edərkən Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan Q-inteqral daha təbii nəticələr almağa imkan verir. Lakin Q- və Q'-inteqral anlayışlarının həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə tətbiqini çətinləşdirən əsas fakt bu inteqralların funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödəməmələridir, yəni iki funksiyanın Q-inteqrallanmasından onların cəminin də Q-inteqrallanan olması alınmır. Bundan əlavə cəm Q-inteqrallanan olsa belə cəmin inteqralı inteqrallar cəminə bərabər olmaya da bilər.

$[a;b]$ parçasında ölçülən funksiyaların Q-inteqralının (Q'-inteqralının) tərifinə

$$m\{x\in[a,b]:|f(x)|>\lambda\}=o(1/\lambda),\qquad \lambda\to+\infty$$

şərtini əlavə etsək, onda Q- və Q'-inteqral anlayışları üst-üstə düşər və alınan funksiyalar sinfində funksiyalara nəzərən additivlik şərtini ödəyərlər, burada m – çoxluğun Lebeq ölçüsüdür (bu halda f funksiyası $[a;b]$ parçasında A-inteqrallanan, Q-inteqralın qiyməti isə f funksiyasının A-inteqralı adlanır).

A-inteqralın xassələri və tətbiqləri P.L.Ulyanovun, Yu.S.Oçanın, İ.L.Bondinin, T.P.Lukaşenkonun, İ.A.Vinoqradovanın, F.S.Vaxerin, Q.A.Xuskivadzenin, K.Yonedanın, V.İ.Rıbakovun, O.D.Çeretelinin, V.A.Skvorçovun, A.V.Rıbkinin, A.B.Aleksandrovun, T.S.Səlimovun, A.A.Saiyadın və digər müəlliflərin, Q və Q'-inteqralların xassələri və tətbiqləri isə E.Titçmarşın, T.S.Səlimovun, M.P.Yefimovanın və R.Ə.Əliyevin işlərində ətraflı tədqiq olunmuşdur.

Dissertasiya işində Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə kompleks müstəvidə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq, habelə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss və kompleks Riss çevirmələrinin, eləcə də modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin paylanma funksiyalarının asimptotikaları verilmiş və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan A-, Q- və Q'-inteqral anlayışlarından istifadə edilərək bu çevirmələr üçün Riss bərabərliklərinin analoqları alınmışdır.

Tədqiqatın obyekt və predmeti.

Dissertasiya işinin obyekti harmonik analizin inteqral çevirmələridir. Tədqiqatın predmeti isə Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışlarından istifadə etməklə bu inteqral çevirmələrin tədqiqidir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

Dissertasiya işinin əsas məqsədi Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin paylanma funksiyalarının asimptotikalarını vermək, Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışlarından istifadə etməklə modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin xassələrini tədqiq edib, onlar üçün Riss bərabərliyinin analoqlarını almaqdır.

Tədqiqat metodları.

Dissertasiya işində həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin, harmonik analizin, sinqulyar inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin və funksional analizin metodlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

- Kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq və modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları, məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu;

- R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss və modifikasiya olunmuş Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları, məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu;

- Kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss və modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları, məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq və modifikasiya olunmuş Alfors-Beurling çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;
- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;
- R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss və modifikasiya olunmuş Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;
- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;
- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss və modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;
- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti.

Dissertasiyanın nəticələri əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Dissertasiya işində alınan nəticələrdən elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin, riyazi fizikanın və mexanikanın müxtəlif məsələlərinin həlli zamanı istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri Xəzər Universitetinın "Riyaziyyat" departamentinin (rəhb. r.ü.f.d. Ə.Hüseynli), BDU-nun "Riyazi analiz" kafedrasının (rəhb. prof. S.S.Mirzəyev), AMEA RMİ-nin "Funksiyalar nəzəriyyəsi" şöbəsinin (rəhb. r.e.d. V.E.İsmayılov) elmi seminarlarında müzakirə edilmişdir. Bundan əlavə dissertasiyada alınmış nəticələr aşağıdakı beynəlxalq elmi konfranslarda məruzə edilmişdir: "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference" adlı beynəlxalq elmi konfranslarda (Bakı, 2018, 2019) (bax: [2, 4]), "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations" adlı beynəlxalq elmi konfransda (Ufa, Rusiya, 2021) (bax: [8]).

Alınan nəticələrdən kompleks müstəvidə kvazikonform inikasların qurulması zamanı, ikidəyişənli kvadratik formanın kanonik şəklə gətirilməsi məsələlərində və elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinə gətirilən bir çox riyazi fizika və mexanika məsələlərinin həlli zamanı istifadə oluna bilər.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. Dissertasiya işində alınan bütün nəticələr iddiaçıya məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri.

- Azərbaycan Respublikası Prezidenti yanında AAK tərəfindən tövsiyyə olunan elmi nəşrlərdə – 6 (bax: [1, 3, 5-7, 9]) (o cümlədən Beynəlxalq bazalara daxil olan elmi nəşrlərdə – 3 (bax: [1, 5, 6]); həmmüəllifsiz – 3 (bax: [3, 7, 9])).
- Tezislər – 3 (bax: [2, 4, 8]) (o cümlədən nəticələri xaricdə dərc olunan – 1 (bax: [8])).

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Xəzər Universiteti "Təbiət elmləri, Sənət və Texnologiya yüksək təhsil" fakültəsinin "Riyaziyyat" departamentində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Titul səhifəsi - 318 işarə, mündəricat – 1390 işarə, giriş - 30761 işarə, üç fəsildən (I fəsil - 64000 işarə, II fəsil - 42000 işarə, III fəsil - 38000 işarə), nəticə - 1246 işarə. Dissertasiyanın ümumi həcmi - 177715 işarədən ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin birinci fəsli Alfors-Beurlinq çevirməsinin xassələrinə həsr olunmuşdur. Bu fəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq və modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmiş və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışlarından istifadə edilməklə məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Fərz edək ki, kompleks müstəvidə $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan f funksiyası verilmişdir.

$$(Bf)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in C : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} dm(w), \quad z \in C$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Sinqulyar inteqral operatorlar nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $1 < p < \infty$ olduqda Alfors-Beurlinq çevirməsi $L_p(C)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni bu halda $f \in L_p(C)$ münasibətindən

$B(f) \in L_p(C)$ münasibətinin ödənilməsi alınır və yalnız $p > 1$ ədədindən asılı olan elə $C_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(C)$ üçün

$$\|Bf\|_{L_p(C)} \le C_p \|f\|_{L_p(C)}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$p = 1$ halında, yəni $f \in L_1(C)$ olduqda isə yalnız

$$m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} \le \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_1(C)}, \quad \lambda > 0$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir, burada m çoxluğun Lebeq ölçüsü, C_1 f funksiyasından asılı olmayan sabit, $m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\}$, $\lambda > 0$ isə f funksiyasının Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasıdır.

Birinci fəslin 1.1 paraqrafında Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 1. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = 0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 2. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = \left| \int_C f(z)\, dm(z) \right|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır.

$$(B_\Omega f)(z) = B(\chi_\Omega f)(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{w\in\Omega:|z-w|>\varepsilon\}}\frac{f(w)}{(z-w)^2}\,dm(w),\ z\in\Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir, burada χ_Ω – Ω çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır.

Birinci fəslin 1.2 paraqrafında modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda\to+\infty$ və $\lambda\to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 3. Fərz edək ki, $f\in L_1(\Omega)$. Onda

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m\{z\in\Omega:|(B_\Omega f)(z)|>\lambda\}=0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 4. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və $f\in L_1(\Omega)$. Onda

$$\limsup_{\lambda\to 0+}\lambda m\{z\in\Omega:|(B_\Omega f)(z)|>\lambda\}=d^*(\Omega)\cdot\left|\int\limits_\Omega f(z)dm(z)\right|,$$

$$\liminf_{\lambda\to 0+}\lambda m\{z\in\Omega:|(B_\Omega f)(z)|>\lambda\}=d_*(\Omega)\cdot\left|\int\limits_\Omega f(z)dm(z)\right|$$

asimptotik bərabərlikləri ödənilir, burada

$$d^*(\Omega)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{m(\Omega\cap U(0;r))}{m(U(0;r))},\qquad d_*(\Omega)=\liminf_{r\to+\infty}\frac{m(\Omega\cap U(0;r))}{m(U(0;r))}.$$

$\Omega\subset C$ məhdud oblastında ölçülən, kompleks qiymətli f funksiyası üçün

$$[f(z)]_n=[f(z)]^n=f(z),\qquad |f(z)|\le n \text{ olduqda,}$$

$$[f(z)]_n=n\,\mathrm{sgn}\,f(z),\ [f(z)]^n=0,\qquad |f(z)|>n \text{ olduqda,}$$

işarə edək, burada $n \in N$, $\operatorname{sgn} w = w/|w|$, $w \neq 0$ olduqda və $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

1929-cu ildə E.Titçmarş tərəfindən Ω oblastında ölçülən funksiyalar üçün Q- və Q'-inteqral anlayışları daxil edilmişdir.

Tərif 1. Əgər

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} [f(z)]_n \, dm(z) \text{ (uyğun olaraq } \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} [f(z)]^n \, dm(z))$$

sonlu limiti varsa, onda f funksiyasına Ω oblastında Q-*inteqrallanan* (uyğun olaraq Q'-*inteqrallanan*) funksiya deyilir və $f \in Q(\Omega)$ $(f \in Q'(\Omega))$ kimi işarə olunur. Bu lmitin qiyməti isə f funksiyasının Ω oblastında Q-*inteqralı* (Q'-*inteqralı*) adlanır və

$$(Q)\int_{\Omega} f(z) dm(z) \quad \left((Q')\int_{\Omega} f(z) dm(z) \right)$$

kimi işarə olunur.

E.Titçmarş göstərmişdir ki, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Furye sıralarına qoşma sıraları tədqiq edərkən Q-inteqral daha təbii nəticələr verir. Lakin yuxarıda da qeyd etdiyimiz kimi həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə Q-inteqral və Q'-inteqral anlayışlarının tətbiqini çətinləşdirən fakt bu inteqralların funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödəməməsidir. Lakin Q-inteqralın (Q'-inteqralın) tərifinə

$$m\{z \in \Omega : |f(z)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \qquad \lambda \to +\infty \tag{1}$$

şərtini əlavə etsək, onda Q- və Q'-inteqral anlayışları üst-üstə düşər və alınan funksiyalar sinfində funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödəyərlər.

Tərif 2. Əgər f funksiyası Ω oblastında Q-inteqrallanandırsa (və ya Q'-inteqrallanandırsa) və (1) şərti ödənilərsə, onda f funksiyasına Ω oblastında A-*inteqrallanan* funksiya deyilir və $f \in A(\Omega)$ kimi işarə olunur. Bu halda $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} [f(z)]_n \, dm(z)$ (və ya $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} [f(z)]^n \, dm(z)$) limitinin qiyməti isə f funksiyasının Ω oblastında A-*inteqralı* adlanır və

$$(A)\int\limits_{\Omega} f(z)dm(z)$$

kimi işarə olunur.

Birinci fəslin 1.3 paraqrafında məhdud $\Omega \subset C$ oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyanın modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Teorem 5. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə məhdud oblastdır, f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır, $g(z)$ funksiyası isə Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $(B_{\Omega} g)(z)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(z) \cdot (B_{\Omega} f)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int\limits_{\Omega} g(z)(B_{\Omega} f)(z)dm(z) = \int\limits_{\Omega} f(z)(B_{\Omega} g)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 1. Fərz edək ki, Ω – kompleks müstəvidə sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır. Onda $(B_{\Omega} f)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int\limits_{\Omega} (B_{\Omega} f)(z)dm(z) = \int\limits_{\Omega} f(z)(B_{\Omega} 1)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Birinci fəslin 1.4 yarımfəslində isə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçünün Alfors-Beurlinq çevirməsinin xassələri tədqiq olunmuşdur.

Tərif 3. Fərz edək ki, kompleks müstəvidə X çoxluğu verilmişdir. Əgər elə $\delta > 0$ ədədi varsa ki, ixtiyari $x, y \in X$ elementləri üçün $|x-y| \geq \delta$ bərabərsizliyi ödənilir, onda X çoxluğuna atomar çoxluq deyəcəyik.

Aydındır ki, atomar çoxluğun ən çoxu hesabi sayda elementi ola bilər.

Tərif 4. Əgər kompleks müstəvidə verilmiş ν ölçüsü atomar çoxluqda cəmlənibsə, onda ν ölçüsünə atomar diskret ölçü deyəcəyik.

Kompleks müstəvidə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülər çoxluğunu M_a ilə işarə edək.

Tərif 5. Fərz edək ki, $\mu \in M_a$ ölçüsü verilmişdir.

$$(B\mu)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in C : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{d\mu(w)}{(z-w)^2}, \quad z \in C$$

funksiyasına μ ölçüsünün Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Aydındır ki, ixtiyari $\mu \in M_a$ ölçüsünün Alfors-Beurlinq çevirməsi kompleks müstəvidə sanki hər yerdə təyin olunub və əgər

$$d\mu(z) = f(z)dm(z) + d\mu_S(z),$$

$$\mathrm{supp}\mu_S = X = \{z_j\}_{j \in J}, \quad \mu_S(z_j) = \alpha_j, \; j \in J,$$

olarsa, onda sanki hər yerdə

$$(B\mu)(z) = (Bf)(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{j \in J} \frac{\alpha_j}{(z_j - z)^2}$$

bərabərliyi ödənilər, burada μ_S ilə μ ölçüsünün sinqulyar hissəsi işarə olunub.

Teorem 6. Fərz edək ki, $\mu \in M_a$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{z \in C : |(B\mu)(z)| > \lambda\} = \|\mu_S\|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir, burada μ_S ilə μ ölçüsünün sinqulyar hissəsi işarə olunub, $\|\mu_S\|$ isə μ_S ölçüsünün tam variasiyasıdır.

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır. Ω oblastında cəmlənmiş, sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülər çoxluğunu $M_a(\Omega)$ ilə işarə edək. $\mu \in M_a(\Omega)$ ölçüsü üçün

$$(B_\Omega \mu)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in \Omega : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{d\mu(w)}{(z-w)^2}, \quad z \in C$$

funksiyasına μ ölçüsünün modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Teorem 7. Fərz edək ki, Ω – kompleks müstəvidə sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $\mu \in M_a(\Omega)$. Əgər g funksiyası Ω oblastının qapanmasında Hölder mənada kəsilməz funksiyadırsa, onda $(B_\Omega \mu)(z) g(z)$ funksiyası Ω oblastında Q'-inteqrallanandır (Q-inteqrallanandır) və

$$(Q')\int_\Omega g(z)(B_\Omega \mu)(z) dm(z) = \int_\Omega (B_\Omega g)(z) d\mu(z)$$

$$\left((Q)\int_\Omega g(z)(B_\Omega \mu)(z) dm(z) = \int_\Omega (B_\Omega g)(z) d\mu(z) \right)$$

bərabərliyi ödənilir.

İkinci fəsil Riss çevirməsinin xassələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Bu fəsildə R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss və modifikasiya olunmuş Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları alınmış və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışından istifadə edilməklə məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Fərz edək ki, R^d fəzasında $p \ge 1$ dərəcədən inteqrallanan f funksiyası verilmişdir.

$$R_j(f)(x) = \gamma(d) \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{y \in R^d : |x-y| > \varepsilon\}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} f(y)dy, \ j \in \{1, 2, \dots .d\}$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının j-ci dəyişənə nəzərən Riss çevirməsi deyilir, burada

$$\gamma(d) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}}, \ \Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

isə Eylerin Qamma funksiyasıdır.

Məlumdur ki, $1 < p < \infty$ olduqda Riss çevirməsi $L_p(R^d)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni bu halda $f \in L_p(R^d)$ münasibətindən $R_j(f) \in L_p(R^d)$ münasibətinin ödənilməsi alınır və yalnız $p > 1$ ədədindən asılı olan elə $\tilde{C}_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(R^d)$ üçün

$$\|R_j f\|_{L_p(R^d)} \le \tilde{C}_p \|f\|_{L_p(R^d)}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$p = 1$ halında, yəni $f \in L_1(R^d)$ olduqda isə yalnız

$$m\left\{x\in R^d : \left|\left(R_j f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\le\frac{\tilde{C}_1}{\lambda}\|f\|_{L_1\left(R^d\right)},\quad \lambda>0$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir, burada $\tilde{C}_1$ f funksiyasından asılı olmayan sabitdir.

İkinci fəslin 2.1 paraqrafında Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda\to+\infty$ və $\lambda\to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 8. Fərz edək ki, $f\in L_1\left(R^d\right)$. Onda

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m\left\{x\in R^d : \left|\left(R_j f\right)(x)\right|>\lambda\right\}=0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 9. Fərz edək ki, $f\in L_1\left(R^d\right)$. Onda

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda m\left\{x\in R^d : \left|\left(R_j f\right)(x)\right|>\lambda\right\}=\gamma(d)\theta(d)\left|\int_{R^d} f(x)dx\right|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir, burada $\theta(d)=\dfrac{2^d}{d\cdot(d-1)!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{d-1}{2}\right]}$

və $\left[\dfrac{d-1}{2}\right]$ ilə $\dfrac{d-1}{2}$ ədədinin tam hissəsi işarə olunub.

Fərz edək ki, Ω R^d fəzasında verilmiş oblastdır və f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır.

$$\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)=R_j\left(\chi_\Omega f\right)(x)=$$

$$\gamma(d)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{y\in\Omega:|x-y|>\varepsilon\}}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}f(y)dy,\ j=1,2,\ldots,d,\quad z\in\Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi deyilir.

İkinci fəslin 2.3 paraqrafında məhdud $\Omega \subset C$ oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Teorem 10. Fərz edək ki, Ω R^d fəzasında verilmiş məhdud oblastdır, $f \in L_1(\Omega)$ və $g(z)$ funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $(R_{j,\Omega}g)(x)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(x)\cdot(R_{j,\Omega}f)(x)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_{\Omega} g(x)(R_{j,\Omega}f)(x)dx = -\int_{\Omega} f(x)(R_{j,\Omega}g)(x)dx$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 2. Fərz edək ki, Ω – R^d fəzasında sərhədi Lyapunov səthi olan məhdud oblastdır və f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır. Onda $(R_{j,\Omega}f)(x)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_{\Omega}(R_{j,\Omega}f)(x)dx = -\int_{\Omega} f(x)(R_{j,\Omega}1)(x)dx$$

bərabərliyi ödənilir.

Üçüncü fəsil isə kompleks Riss çevirməsinin xassələrinin tədqiqinə həsr olunub. Bu fəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss və modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları alınmış və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışından istifadə edilməklə məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Fərz edək ki, kompleks müstəvidə $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan f funksiyası verilmişdir. İxtiyari $k \in Z$, $k \neq 0$ üçün

$$\left(R^{(k)} f\right)(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in C : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} f(w) dm(w), \; z \in C$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının k tərtibli kompleks Riss çevirməsi deyilir. $k = 0$ halında $R^{(0)}$ olaraq eynilik operatoru götürülür, yəni $R^{(0)} = I$. $k = 2$ halında kompleks Riss çevirməsi Alfors-Beurlinq çevirməsi ilə üst-üstə düşdüyündən kompleks Riss çevirməsinə Alfors-Beurlinq çevirməsinin ümumiləşməsi kimi baxa bilərik.

Üçüncü fəslin 3.1 paraqrafında kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 11. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} = 0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 12. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} = \frac{|k|}{2} \cdot \left|\int_C f(z) dm(z)\right|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır.

$$\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z) = R^{(k)}(\chi_{\Omega} f)(z) =$$

$$= \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in \Omega : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} f(w) dm(w), \quad z \in \Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi deyilir.

Üçüncü fəslin 3.3 paraqrafında məhdud $\Omega \subset C$ oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyanın kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Teorem 13. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə məhdud oblastdır, f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır və g funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $R_\Omega^{(k)} g$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(z)\cdot\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega g(z)\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)dm(z) = (-1)^k \int_\Omega f(z)\left(R_\Omega^{(k)} g\right)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 3. Fərz edək ki, Ω – sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və f funksiyası Ω oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır. Onda $\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega \left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)dm(z) = (-1)^k \int_\Omega f(z)\left(R_\Omega^{(k)} 1\right)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Sonda məsələlərin qoyuluşuna, müntəzəm diqqətinə və qiymətli məsləhətlərinə görə elmi rəhbərim prof. Rəşid Əliyevə öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi harmonik analizin əsas inteqral çevirmələrindən olan Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin xassələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas elmi nəticələr alınmışdır:

- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;
- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;
- R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;
- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;
- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;
- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and restricted Ahlfors–Beurling transform // Integral Transforms and Special Functions, – 2018. vol. 29:10, – p. 820-830.
2. Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and Ahlfors-Beurling transform // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference, Khazar University, -Baku: Azerbaijan, -21-24 May, – 2018, – p. 60.
3. Nebiyeva, Kh.I. Asymptotic behavior of the distribution function of the Ahlfors-Beurling transform // -Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2019. vol. 7:2, – p. 3-9.
4. Omaroghlu (Nebiyeva), Kh.I. The A-integral and Riesz transform // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference, Khazar University, -Baku, Azerbaijan: -10-14 June, – 2019, – p. 93-94.
5. Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and restricted complex Riesz transform // -Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2020. vol. 10:2, – p. 209-221.
6. Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and restricted Riesz transform // Constructive Mathematical Analysis, – 2020. vol. 3:3, – p. 104-112.
7. Nebiyeva, Kh.I. Asymptotic behavior of the distribution function of the Riesz transform // -Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2020. vol. 8:2, – p. 3-9.
8. Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. On properties of the complex Riesz transform // Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations, Bannoe Lake, -Ufa, Russia: -15-19 March, – 2021, – p.12.
9. Nebiyeva, Kh.I. On properties of Ahlfors-Beurling transform of finite complex measures // -Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2021. vol. 9:1, – p. 40-48.

Dissertasiyanın müdafiəsi **24 noyabr 2023-cü il** tarixində **14^{00}**-da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç, 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **20 oktyabr 2023-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 05.10.2023
Kağızın formatı: 60x841/16
Həcm: 37859
Tiraj: 100