AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

HARMONİK ANALİZİN İNTEQRAL ÇEVİRMƏLƏRİNİN BƏZİ XASSƏLƏRİ

İxtisas: 1202.01 - Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru

elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASİYA

İddiaçı: _____________ **Xanım İsaxanovna Öməroğlu**

Elmi rəhbər: riyaziyyat üzrə elmlər dokotru, dosent

_____________ **Rəşid Əvəzağa oğlu Əliyev**

Bakı – 2022

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Dissertasiya işi harmonik analizin əsas inteqral çevirmələrindən olan Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələrinin xassələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Fizika və mexanikanın bir çox məsələlərinin gətirildiyi xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həlli zamanı istifadə olunan potensiallar əsasən sinqulyar inteqral operatorlar olurlar ki, onların da əsasını adlarını yuxarıda qeyd etdiyimiz inteqral çevirmələri təşkil edir. Bu isə dissertasiya mövzusunun kifayət qədər aktual və praktiki əhəmiyyətə malik olduğunu göstərir.

Alfors-Beurlinq çevirməsi ikidəyişənli kvadratik formanın kanonik şəklə gətirilməsi məsələsi və kompleks müstəvidə kvazikonform inikasların qurulması məsələləri zamanı yaranmışdır. Belə ki, bu məsələlər Beltrami diferensial tənliklər sisteminə gətirilərək həll edilir. L.Ahlfors (bax: [54]) göstərmişdir ki, Beltrami diferensial tənliklər sisteminin kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Koşi inteqralı şəklində göstərilən həlli var və axtarılan funksiya Alfors-Beurlinq çevirməsi vasitəsilə verilən inteqral tənliyin həllidir. Bu inteqral tənliyin həllinin varlığı isə Alfors-Beurlinq çevirməsini müəyyən funksiyalar sinfində məhdudluğundan və xassələrindən asılıdır (bax: [19, 54, 75, 100]).

Riss çevirməsi isə Hilbert çevirməsinin çoxölçülü analoqu olub, Furye çevirməsinın tətbiqi zamanı və elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qoyulmuş Dirixle məsələsinin və Neyman məsələsinin həlli zamanı geniş istifadə olunur (bax: [42, 51, 75, 91, 94, 111, 115]).

İlk dəfə analitik funksiyalar üçün Riman və Hilbert sərhəd məsələlərinin həlli və Furye sıralarının yığılması məsələlərindən qarşıya çıxan birölçülü sinqulyar inteqral operator olan Hilbert çevirməsinin kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar fəzasında məhdudluğu D.Hilbert tərəfindən 1905-ci ildə göstərilmişdir (bax [120]). Sonralar, 1922-ci ildə A.Plessner tərəfindən Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalar üçün Hilbert çevirməsinin sanki hər yerdə varlığı isbat olunduqdan sonra (bax [77]), 1928-ci ildə M.Riss tərəfindən Hilbert çevirməsinin ixtiyari $1 < p < \infty$ üçün L_p

fəzasında məhdudluğu isbat edilmişdir (bax: [110]). $p=1$ halında isə Hilbert çevirməsi L_1 fəzasından L_1 fəzasına təsir etmir, daha dəqiq desək, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyanın Hilbert çevirməsi Lebeq mənada inteqrallanan olmaya da bilər. A.Kolmoqorov (bax: [97]) göstərmişdir ki, $p=1$ halında isə Hilbert çevirməsi L_1 fəzasından zəif L_1 fəzasına təsir edir. A.Plessner və M.Rissin isbat üsulları kompleks analizin metodlarına əsaslandıqlarından bu üsullar çoxölçülü sinqulyar inteqral operatorların, o cümlədən geniş tətbiqləri olan Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələrinin tədqiqinə imkan vermir. Bu məqsədlə ilk dəfə N.Luzin tərəfindən məsələ qoyuldu ki, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Hilbert çevirməsinin varlığı və Hilbert çevirməsinin L_p, $1<p<\infty$ fəzalarında məhdudluğunu həqiqi analizin metodları vasitəsilə isbat etmək olarmı. Bu məsələ E.Titçmarş [112] tərəfindən öz həllini tapdı. E.Titçmarşın isbat metodunu təkmilləşdirərək 1952-ci ildə A.Kalderon və A.Ziqmund (bax: [78, 111]) çoxölçülü halda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların sinqulyar inteqrallarının sanki hər yerdə varlığını, çoxölçülü sinqulyar inteqral operatorların, o cümlədən Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələrinin L_p, $1<p<\infty$ fəzalarında məhdudluğunu, $p=1$ halında isə L_1 fəzasından zəif L_1 fəzasına təsir etdiyini göstərdilər. Sonralar isə R.Hunt, B.Muckenhoupt, R.Wheeden [92], F.Chiarenza, M.Frasca [79], J.Peetre [107], D.R.Adams [52, 53], R.Coifman [81, 82], E.Stein, G.Weiss [42], C.Fefferman [89], A.Cianchi [80], E.Nakai [101, 102], S.Samko [74, 85, 90, 94], V.Kokilashvilli [94-96], R.Banuelos, P.Janakiraman [76], V.Cruz, X.Tolsa [83], T.Iwaniec [93], V.Cruz, J.Mateu, J.Orobitg [84], E.Doubtsov, A.V.Vasin [86], O.Dragicevic [87], H.Kwok-Pun [98], M.Prats [108], X.Tolsa [113], Z.Guo, P.Li, L.Peng [119], A.V.Vasin [116] və digər tədqiqatçılar sinqulyar inteqral operatorların, o cümlədən Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələrinin çəkili Lebeq, Orliç, Morri, Sobolev, Besov, Kampanato, Hölder və s. funksional fəzalarda məhdudluğu və digər xassələrini tədqiq etmişlər. Azərbaycan riyaziyyatçılarından bu sahədə A.Ə.Babayev [1, 11], İ.A.Əliyev, A.C.Hacıyev [5], S.K.Abdullayev [1-3], V.S.Quliyev [55, 85, 90], R.M.Rzayev [36], C.H.Həsənov [74, 90], R.Mustafaev [55] və digər tədqiqatçıların işlərini qeyd etmək olar.

Qeyd etdiyimiz kimi Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələri ümumiyyətlə götürsək Lebeq mənada inteqrallanan olmadıqlarından Lebeq mənada inteqral anlayışından istifadə etməklə L_1 fəzasından olan funksiyaların Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələrini tam tədqiq etmək mümkün deyil. 1929-cu ildə E.Titçmarş [112] tərəfindən Q- və Q'-inteqral anlayışları daxil edildi. Bu məqalədə E.Titçmarş göstərmişdir ki, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Furye sıralarına qoşma triqonometrik sıraları tədqiq edərkən Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan Q-inteqral daha təbii nəticələr verir. Lakin həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə Q- və Q'-inteqral anlayışlarının tətbiqini çətinləşdirən əsas fakt bu inteqralların funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödəməmələridir, yəni iki funksiyanın Q-inteqrallanmasından onların cəminin də Q-inteqrallanan olması alınmır. Bundan əlavə cəm Q-inteqrallanan olsa belə cəmin inteqralı inteqrallar cəminə bərabər olmaya da bilər. Lakin $[a;b]$ parçasında ölçülən funksiyaların Q-inteqralının (Q'-inteqralının) tərifinə

$$m\{x \in [a,b]: |f(x)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \qquad \lambda \to +\infty$$

şərtini əlavə etsək, onda Q- və Q'-inteqral anlayışları üst-üstə düşər və alınan funksiyalar sinfində funksiyalara nəzərən additivlik şərtini ödəyərlər, burada m – çoxluğun Lebeq ölçüsüdür (bu halda f funksiyası $[a;b]$ parçasında A-inteqrallanan, Q-inteqralın qiyməti isə f funksiyasının A-inteqralı adlanır).

A-inteqralın xassələri və tətbiqləri P.L.Ulyanovun [43-49], Yu.S.Oçanın [35], İ.L.Bondinin [12-17], T.P.Lukaşenkonun [31-34, 99], İ.A.Vinoqradovanın [20-27], F.S.Vaxerin [18], Q.A.Xuskivadzenin [50], K.Yonedanın [117, 118], V.İ.Rıbakovun [37], O.D.Çeretelinin [114], V.A.Skvorçovun [41], A.B.Aleksandrovun [4], A.V.Rıbkinin [38, 109], T.S.Səlimovun [39], A.A.Saiyadın [8-10] və digər müəlliflərin, Q və Q'-inteqralların xassələri və tətbiqləri isə E.Titçmarşın [112], T.S.Səlimovun [40, 56], M.P.Yefimovanın [28-30] və R.Ə.Əliyevin [6,7, 56-68] işlərində ətraflı tədqiq olunmuşdur.

Dissertasiya işində Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə kompleks müstəvidə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq və modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirmələrinin, habelə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss və kompleks Riss çevirmələrinin paylanma funksiyalarının asimptotikaları verilmiş və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan A-, Q- və Q'-inteqral anlayışlarından istifadə edilərək bu çevirmələr üçün Riss bərabərliklərinin analoqları alınmışdır.

Tədqiqatın obyekt və predmeti.

Alfors-Beurlinq çevirməsi, Riss çevirməsi, kompleks Riss çevirməsi.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

Dissertasiya işinin əsas məqsədi Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin paylanma funksiyalarının asimptotikalarını vermək, Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışlarından istifadə etməklə modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq, Riss və kompleks Riss çevirmələrinin xassələrini tədqiq edib, onlar üçün Riss bərabərliyinin analoqlarını almaqdır.

Tədqiqat metodları.

Dissertasiya işində həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin, sinqulyar inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin və funksional analizin metodlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

1. Kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları, məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu;

2. R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsinin

paylanma funksiyasının asimptotikaları, məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu;

3. Kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları, məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;

- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;

- R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;

- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;

- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;

- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti.

Dissertasiyanın nəticələri əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Dissertasiya işində alınan nəticələrdən xüsusi törəməli diferensial tənliklərin, riyazi fizikanın və mexanikanın müxtəlif məsələlərinin həlli zamanı istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri Xəzər Universitetinın "Riyaziyyat" departamentinin (rəhb. r.ü.f.d. Ə.Hüseynli) elmi seminarlarında, BDU-nun "Riyazi analiz" kafedrasının (rəhb. prof. S.S.Mirzəyev) elmi seminarlarında, AMEA RMİ-nin "Funksiyalar nəzəriyyəsi" şöbəsinin (rəhb. r.e.d. V.E.İsmayılov) elmi seminarlarında müzakirə edilmişdir. Bundan əlavə dissertasiyada alınmış nəticələr aşağıdakı beynəlxalq elmi konfranslarda məruzə edilmişdir: "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference" adlı beynəlxalq elmi konfranslarda (Bakı, 2018, 2019) (bax: [70, 106]), "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations" adlı beynəlxalq elmi konfransda (Ufa, Rusiya, 2021) (bax: [73]).

Alınan nəticələr həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində tətbiq edilə bilər. Alınan nəticələrdən kompleks müstəvidə kvazikonform inikasların qurulması zamanı, ikidəyişənli kvadratik formanın kanonik şəklə gətirilməsi məsələlərində və elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinə gətirilən riyazi fizika və mexanika məsələlərinin həlli zamanı istifadə oluna bilər.

Nəşrlər.

- Azərbaycan Respublikası Prezidenti yanında AAK tərəfindən tövsiyyə olunan elmi nəşrlərdə – 6 (bax: [69, 71, 72, 103-105]) (o cümlədən Beynəlxalq bazalara daxil olan elmi nəşrlərdə – 3 (bax: [69, 71, 72]); həmmüəllifsiz – 3 (bax: [103-105])).
- Tezislər – 3 (bax: [70, 73, 106]) (o cümlədən nəticələri xaricdə dərc olunan – 1 (bax: [73])).

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Xəzər Universiteti "Təbiət elmləri, Sənət və Texnologiya yüksək təhsil" fakültəsinin "Riyaziyyat" departamentində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Titul səhifəsi - 318 işarə, mündəricat – 1390 işarə, giriş - 30761 işarə, üç fəsildən (I fəsil - 64000 işarə, II fəsil - 42000 işarə, III fəsil - 38000 işarə), nəticə - 1246 işarə. Dissertasiyanın ümumi həcmi - 177715 işarədən ibarətdir.

Dissertasiya işinin qısa məzmunu ilə tanış olaq. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Birinci fəsil Alfors-Beurlinq çevirməsinin xassələrinə həsr olunmuşdur. Bu fəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları alınmış və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışlarından istifadə edilməklə məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Fərz edək ki, kompleks müstəvidə $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan, yəni $f \in L_p(C)$, $1 \leq p < \infty$ funksiyası verilmişdir.

$$(Bf)(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in C : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2}\, dm(w), \quad z \in C$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Birinci fəslin 1.1 paraqrafında Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 0.1. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = 0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 0.2. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = \left| \int\limits_C f(z)\, dm(z) \right|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$.

$$(B_\Omega f)(z) = B(\chi_\Omega f)(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in \Omega : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2}\, dm(w), \quad z \in \Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir, burada χ_Ω – Ω çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır.

Birinci fəslin 1.2 paraqrafında modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 0.3. Fərz edək ki, $f \in L_1(\Omega)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} = 0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 0.4. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$. Onda

$$\limsup_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} = d^*(\Omega) \cdot \left| \int_\Omega f(z) dm(z) \right|,$$

$$\liminf_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} = d_*(\Omega) \cdot \left| \int_\Omega f(z) dm(z) \right|$$

asimptotik bərabərlikləri ödənilir, burada

$$d^*(\Omega) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(\Omega \cap U(0;r))}{m(U(0;r))}, \quad d_*(\Omega) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(\Omega \cap U(0;r))}{m(U(0;r))}.$$

$\Omega \subset C$ məhdud oblastında ölçülən kompleks qiymətli f funksiyası üçün

$[f(z)]_n = [f(z)]^n = f(z)$, $\qquad |f(z)| \le n$ olduqda,

$[f(z)]_n = n \operatorname{sgn} f(z)$, $[f(z)]^n = 0$, $\qquad |f(z)| > n$ olduqda,

işarə edək, burada $n \in N$, $\operatorname{sgn} w = w/|w|$, $w \neq 0$ olduqda və $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

1929-cu ildə E.Titçmarş [112] tərəfindən Ω oblastında ölçülən funksiyalar üçün Q - və Q' -inteqral anlayışları daxil edilmişdir.

Tərif 0.1. Əgər sonlu

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(z)]_n\,dm(z)\text{ (uyğun olaraq }\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(z)]^n\,dm(z))$$

limiti varsa, onda f funksiyasına Ω oblastında Q-*inteqrallanan* (uyğun olaraq Q'-*inteqrallanan*) funksiya deyilir və $f\in Q(\Omega)$ $(f\in Q'(\Omega))$ kimi işarə olunur. Bu lmitin qiyməti isə f funksiyasının Q-*inteqralı* (Q'-*inteqralı*) adlanır və

$$(Q)\int_{\Omega} f(z)dm(z)\quad\left((Q')\int_{\Omega} f(z)dm(z)\right)$$

kimi işarə olunur.

E.Titçmarş göstərmişdir ki, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Furye sıralarına qoşma sıraları tədqiq edərkən Q-inteqral daha təbii nəticələr verir. Lakin həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə Q-inteqral və Q'-inteqral anlayışlarının tətbiqini çətinləşdirən fakt bu inteqralların funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödəməməsidir, yəni iki funksiyanın Q-inteqrallanmasından (Q'-inteqrallanmasından) onların cəminin də Q-inteqrallanan (Q'-inteqrallanan) olması alınmır. Bundan əlavə cəm Q-inteqrallanan (Q'-inteqrallanan) olsa belə cəmin inteqralı inteqrallar cəminə bərabər olmaya da bilər. Lakin Q-inteqralın (Q'-inteqralın) tərifinə

$$m\{z\in\Omega:|f(z)|>\lambda\}=o(1/\lambda),\qquad \lambda\to+\infty \tag{0.1}$$

şərtini əlavə etsək, onda Q- və Q'-inteqral anlayışları üst-üstə düşər və alınan funksiyalar sinfində funksiyalara nəzərən additivlik şərtini ödəyərlər.

Tərif 0.2. Əgər f funksiyası Ω oblastında Q-inteqrallanandırsa (və ya Q'-inteqrallanandırsa) və (0.1) şərti ödənilərsə, onda f funksiyasına Ω oblastında A-*inteqrallanan* funksiya deyilir və $f\in A(\Omega)$ kimi işarə olunur. Bu halda $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(z)]_n\,dm(z)$ (və ya $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(z)]^n\,dm(z)$) limitinin qiyməti isə f funksiyasının A-*inteqralı* adlanır və

$$(A)\int_{\Omega} f(z)dm(z)$$

kimi işarə olunur.

Birinci fəslin 1.3 paraqrafında $\Omega \subset C$ məhdud oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyanın Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Teorem 0.5. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə məhdud oblastdır, $f \in L_1(\Omega)$ və $g(z)$ funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $(B_\Omega g)(z)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(z)\cdot(B_\Omega f)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega g(z)(B_\Omega f)(z)dm(z) = \int_\Omega f(z)(B_\Omega g)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 0.1. Fərz edək ki, Ω – sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$. Onda $(B_\Omega f)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega (B_\Omega f)(z)dm(z) = \int_\Omega f(z)(B_\Omega 1)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Birinci fəslin 1.4 yarımfəslində isə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçünün Alfors-Beurlinq çevirməsinin xassələri öyrənilmişdir.

Tərif 0.3. Fərz edək ki, $X \subset C$ çoxluğu verilmişdir. Əgər elə $\delta > 0$ ədədi varsa ki, ixtiyari $x, y \in X$ elementləri üçün $|x - y| \geq \delta$ bərabərsizliyi ödənilir, onda X çoxluğuna atomar çoxluq deyəcəyik.

Aydındır ki, atomar çoxluğun ən çoxu hesabi sayda elementi var.

Tərif 0.4. Əgər kompleks müstəvidə verilmiş ν ölçüsü atomar çoxluqda cəmlənibsə, onda ona atomar diskret ölçü deyəcəyik.

Kompleks müstəvidə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülər çoxluğunu M_a ilə işarə edəcəyik.

Tərif 0.5. Fərz edək ki, $\mu \in M_a$ ölçüsü verilmişdir.

$$(B\mu)(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in C : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{d\mu(w)}{(z-w)^2}, \quad z \in C$$

funksiyasına μ ölçüsünün Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Aydındır ki, ixtiyari $\mu \in M_a$ ölçüsünün Alfors-Beurlinq çevirməsi sanki hər bir $z \in C$ nöqtəsində təyin olunub və əgər

$$d\mu(z) = f(z)dm(z) + d\mu_s(z), \ \ \mathrm{supp}\mu_s = X = \{z_j\}_{j\in J}, \ \ \mu_s(z_j) = \alpha_j, \ j \in J$$

olarsa, onda sanki hər yerdə

$$(B\mu)(z) = (Bf)(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{j\in J}\frac{\alpha_j}{(z_j - z)^2}$$

olar, burada μ_s μ ölçüsünün sinqulyar hissəsidir.

Teorem 0.6. Fərz edək ki, $\mu \in M_a$. Onda

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda m\{z \in C : |(B\mu)(z)| > \lambda\} = \|\mu_s\|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir, burada μ_s μ ölçüsünün sinqulyar hissəsi, $\|\mu_s\|$ isə μ_s ölçüsünün tam variasiyasıdır.

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır. Ω oblastında cəmlənmiş, sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülər çoxluğunu $M_a(\Omega)$ ilə işarə edəcəyik. $\mu \in M_a(\Omega)$ ölçüsü üçün

$$(B_\Omega\mu)(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{w\in\Omega:|z-w|>\varepsilon\}}\frac{d\mu(w)}{(z-w)^2}, \quad z \in C$$

funksiyasına μ ölçüsünün modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Teorem 0.7. Fərz edək ki, Ω – kompleks müstəvidə sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $\mu \in M_a(\Omega)$. Əgər g funksiyası Ω oblastının qapanmasında Hölder mənada kəsilməz funksiyadırsa, onda $(B_\Omega\mu)(z)g(z)$ funksiyası Ω oblastında Q'-inteqrallanandır və

$$(Q')\int_\Omega g(z)(B_\Omega\mu)(z)dm(z) = \int_\Omega (B_\Omega g)(z)d\mu(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 0.2. Fərz edək ki, Ω – kompleks müstəvidə sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $\mu \in M_a(\Omega)$. Əgər g funksiyası Ω oblastının qapanmasında Hölder mənada kəsilməz funksiyadırsa, onda $(B_\Omega \mu)(z) g(z)$ funksiyası Ω oblastında Q-inteqrallanandır və

$$(Q)\int_\Omega g(z)(B_\Omega \mu)(z)dm(z) = \int_\Omega (B_\Omega g)(z)d\mu(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

İkinci fəsil Riss çevirməsinin xassələrinə həsr olunmuşdur. Bu fəsildə R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları alınmış və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışlarından istifadə edilməklə məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Fərz edək ki, R^d fəzasında $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan, yəni $f \in L_p(R^d)$, $1 \leq p < \infty$ funksiyası verilmişdir.

$$R_j(f)(x) = \gamma_{(d)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{y \in R^d : |x-y| > \varepsilon\}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} f(y)dy, \ j \in \{1, 2, ...d\}$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının j-ci dəyişənə nəzərən Riss çevirməsi deyilir, burada $\gamma_{(d)} = \dfrac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}}$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ isə Eylerin Qamma funksiyasıdır.

İkinci fəslin 2.1 paraqrafında Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 0.8. Fərz edək ki, $f \in L_1(R^d)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{x \in R^d : |(R_j f)(x)| > \lambda\} = 0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 0.9. Fərz edək ki, $f \in L_1(R^d)$. Onda

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda m\left\{x\in R^d : \left|\left(R_j f\right)(x)\right|>\lambda\right\}=\gamma_{(d)}\theta_{(d)}\left|\int_{R^d} f(x)dx\right|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir, burada $\theta_{(d)}=\dfrac{2^d}{d\cdot(d-1)!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{d-1}{2}\right]}$ və $\left[\dfrac{d-1}{2}\right]$ ilə $\dfrac{d-1}{2}$ ədədinin tam hissəsi işarə olunub.

Fərz edək ki, Ω R^d fəzasında verilmiş oblastdır və $f\in L_1(\Omega)$.

$$\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)=R_j\left(\chi_\Omega f\right)(x)=\gamma_{(d)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{y\in\Omega:|x-y|>\varepsilon\}}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}f(y)dy,\ j=1,2,...,d,\quad z\in\Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi deyilir.

İkinci fəslin 2.3 paraqrafında $\Omega\subset C$ məhdud oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyanın Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Teorem 0.10. Fərz edək ki, $\Omega\subset R^d$ məhdud oblastdır, $f\in L_1(\Omega)$ və $g(z)$ funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $\left(R_{j,\Omega}g\right)(x)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(x)\cdot\left(R_{j,\Omega}f\right)(x)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega g(x)\left(R_{j,\Omega}f\right)(x)dx=-\int_\Omega f(x)\left(R_{j,\Omega}g\right)(x)dx$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 0.3. Fərz edək ki, Ω – sərhədi Lyapunov səthi olan məhdud oblastdır və $f\in L_1(\Omega)$. Onda $\left(R_{j,\Omega}f\right)(x)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega\left(R_{j,\Omega}f\right)(x)dx=-\int_\Omega f(x)\left(R_{j,\Omega}1\right)(x)dx$$

bərabərliyi ödənilir.

Üçüncü fəsil kompleks Riss çevirməsinin xassələrinə həsr olunmuşdur. Bu fəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları alınmış və Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan inteqral anlayışlarından istifadə edilməklə məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Fərz edək ki, kompleks müstəvidə $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan, yəni $f \in L_p(C)$, $1 \leq p < \infty$ funksiyası verilmişdir. İxtiyari $k \in Z$, $k \neq 0$ üçün

$$\left(R^{(k)} f\right)(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in C: |z-w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} f(w) dm(w), \quad z \in C$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının k tərtibli kompleks Riss çevirməsi deyilir. $k = 0$ halında $R^{(0)}$ olaraq eynilik operatoru götürülür: $R^{(0)} = I$. $k = 2$ halında isə kompleks Riss çevirməsi Alfors-Beurlinq çevirməsi ilə üst-üstə düşür. Buna görə də kompleks Riss çevirməsinə Alfors-Beurlinq çevirməsinin ümumiləşməsi kimi baxa bilərik.

Üçüncü fəslin 3.1 paraqrafında kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikaları verilmişdir.

Teorem 0.11. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} = 0$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teorem 0.12. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} = \frac{|k|}{2} \cdot \left|\int\limits_C f(z) dm(z)\right|$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$.

$$\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z) = R^{(k)}\left(\chi_\Omega f\right)(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in \Omega: |z-w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} f(w) dm(w), \quad z \in \Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi deyilir.

Üçüncü fəslin 3.3 paraqrafında $\Omega \subset C$ məhdud oblastında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyanın kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

Teorem 0.13. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə məhdud oblastdır, $f \in L_1(\Omega)$ və $g(z)$ funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $\left(R_\Omega^{(k)} g\right)(z)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(z) \cdot \left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega g(z)\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)dm(z) = (-1)^k \int_\Omega f(z)\left(R_\Omega^{(k)} g\right)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 0.4. Fərz edək ki, Ω – sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$. Onda $\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega \left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)dm(z) = (-1)^k \int_\Omega f(z)\left(R_\Omega^{(k)} 1\right)(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

I FƏSİL

ALFORS-BEURLİNG ÇEVİRMƏSİ VƏ ONUN BƏZİ XASSƏLƏRİ

Fərz edək ki, kompleks müstəvidə $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan, yəni $f \in L_p(C)$, $1 \leq p < \infty$ funksiyası verilmişdir.

$$(Bf)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in C: |z-w| > \varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} dm(w), \quad z \in C$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir. Alfors-Beurlinq çevirməsi kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində mühüm əhəmiyyət daşıyan operatorlardan biridir. Ona bəzən kompleks müstəvidə "Hilbert çevirməsi" də deyilir. [54, 75, 84, 100] işlərində göstərilmişdir ki, Alfors-Beurlinq çevirməsi kvazikonform inikas nəzəriyyəsində, eləcə də kəsilən əmsallı Beltrami diferensial tənliyinin həlli zamanı mühüm rol oynayır.

Sinqulyar inteqral operatorlar nəzəriyyəsindən məlumdur ki (bax: [111]), $1 < p < \infty$ olduqda Alfors-Beurlinq çevirməsi $L_p(C)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni bu halda $f \in L_p(C)$ münasibətindən $B(f) \in L_p(C)$ münasibətinin ödənilməsi alınır və yalnız $p > 1$ ədədindən asılı olan elə $C_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(C)$ üçün

$$\|Bf\|_{L_p(C)} \leq C_p \|f\|_{L_p(C)} \tag{1.0.1}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$p = 1$ halında, yəni $f \in L_1(C)$ olduqda isə yalnız

$$m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} \leq \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_1(C)}, \quad \lambda > 0 \tag{1.0.2}$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir, burada m çoxluğun Lebeq ölçüsü, C_1 f funksiyasından asılı olmayan sabit, $m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\}$, $\lambda > 0$ isə f funksiyasının Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasıdır.

[76, 83, 84, 86, 87, 93, 98, 108, 113, 116] məqalələrində B operatorunun digər funksional fəzalarda (Sobolev, Besov, Kampanato, Morri və s.) məhdudluğu araşdırılmışdır.

Biz bu fəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Alfors-Beurlinq çevirmələrinin paylanma funksiyalarının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikalarını verəcəyik, Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan, E.Titchmarsh tərəfindən daxil edilən A-inteqral və Q-inteqral anlayışlarından istifadə edərək modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqlarını isbat edəcəyik.

1.1. Kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları

Biz bu yarımfəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to 0+$ və $\lambda \to +\infty$ şərti daxilində asimptotikalarını tədqiq edəcəyik.

Teorem 1.1.1. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = 0 \qquad (1.1.1)$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. $f \in L_1(C)$ olduğundan Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzlik xassəsinə əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $n \in N$ və $r > 0$ ədədləri tapa bilərik ki,

$$\left\| f-[f]_r^n \right\|_{L_1(C)} \le \frac{\varepsilon}{4C_1} \tag{1.1.2}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada

$$[f]_r^n(z)=[f]^n \chi_{(U(0;r))}(z),$$

$$[f(z)]^n = f(z),\ |f(z)|\le n \text{ olduqda, } [f(z)]^n = 0,\ |f(z)|>n \text{ olduqda,}$$

$\chi_{(U(0;r))}(z)$ isə $U(0;r)=\{z\in C: |z|<r\}$ dairəsinin xarakteristik funksiyasıdır.

(1.0.2) və (1.1.2) bərabərsizliklərindən alarıq ki, ixtiyari $\lambda>0$ ədədi üçün

$$m\left\{z\in C: \left|B\left(f-[f]_r^n\right)(z)\right|>\frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{2C_1}{\lambda}\left\| f-[f]_r^n \right\|_{L_1(C)} \le \frac{\varepsilon}{2\lambda} \tag{1.1.3}$$

ödənilir. $[f]_r^n(z)$ funksiyası kompleks müstəvidə məhdud funksiya olduğundan $f\in L_1(C)$ münasibətindən alınır ki, ixtiyari $p\ge 1$ üçün $[f]_r^n \in L_p(C)$ münasibəti ödənilir. Alfors-Beurlinq çevirməsinin yuxarıda qeyd etdiyimiz xassəsinə əsasən ixtiyari $p>1$ üçün $B[f]_r^n \in L_p(C)$ olar.

$$F_1(z)=B[f]_r^n(z)\cdot \chi_{(U(0;2r))}(z), \quad F_2(z)=B[f]_r^n(z)\cdot \chi_{(C\setminus U(0;2r))}(z)$$

işarə edək. $[f]_r^n$ funksiyasının Alfors-Beurlinq çevirməsini

$$B[f]_r^n(z)=F_1(z)+F_2(z)$$

şəklində göstərə bilərik. $F_1(z)$ funksiyası $\overline{U(0;2r)}$ qapalı dairəsində, $F_2(z)$ funksiyası isə $C\setminus U(0;2r)$ çoxluğunda cəmlənib. İxtiyari $p>1$ üçün $B[f]_r^n \in L_p(C)$ münasibətindən $F_1(z)\in L_p(C)$ münasibətinin də ödənildiyi alınır. $F_1(z)$ funksiyası məhdud çoxluqda cəmləndiyi üşün $F_1(z)\in L_p(C)$, $p>1$ münasibətindən alarıq ki, $F_1(z)\in L_1(C)$. Buna görə də $\lambda>0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$\frac{\lambda}{4} m\{z \in C : |F_1(z)| > \lambda/4\} \leq \int\limits_{\{z \in C: |F_1(z)| > \lambda/4\}} |F_1(z)| dm(z) < \frac{\varepsilon}{8} \tag{1.1.4}$$

bərabərsizliyi ödəniləcək. Digər tərəfdən, ixtiyari $z \in C \setminus U(0;2r)$ nöqtəsi üçün

$$\left| B\left([f]_r^n\right)(z) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{U(0;r)} \frac{\left|[f]_r^n(w)\right|}{|z-w|^2} dm(w) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{U(0;r)} \left|[f]_r^n(w)\right| dm(w) = \frac{1}{\pi r^2} \left\|[f]_r^n\right\|_{L_1(C)} \leq \frac{1}{\pi r^2} \|f\|_{L_1(C)}$$

bərabərsizliyindən alarıq ki, $F_2(z)$ funksiyası məhduddur. Buradan və (1.1.4) qiymətləndirməsindən alınır ki, $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$m\left\{z \in C : \left|B[f]_r^n(z)\right| > \lambda/2\right\} \leq m\{z \in C : |F_1(z)| > \lambda/4\} < \frac{\varepsilon}{2\lambda} \tag{1.1.5}$$

olur. İxtiyari $\lambda > 0$ ədədi üçün

$$\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} \subset \left\{z \in C : \left|B[f]_r^n(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{z \in C : \left|B\left(f - [f]_r^n\right)(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

münasibəti ödənildiyindən (1.1.3) və (1.1.5) qiymətləndirmələrindən alarıq ki, $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} \leq$$

$$\leq m\left\{z \in C : \left|B[f]_r^n(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} + m\left\{z \in C : \left|B\left(f - [f]_r^n\right)(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2\lambda} + \frac{\varepsilon}{2\lambda} = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Bu isə (1.1.1) asimptotik bərabərliyinin ödənildiyini göstərir. Teorem isbat olundu.

Teorem 1.1.2. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = \left| \int_C f(z) dm(z) \right| \tag{1.1.6}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teoremin isbatına keçməzdən əvvəl aşağıdakı köməkçi lemmanı isbat edək.

Lemma 1.1.1. Əgər $f \in L_1(C)$ və $\int_C f(z) dm(z) = 0$ olarsa, onda

$$m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \quad \lambda \to 0+ \tag{1.1.7}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Lemma 1.1.1-in isbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, f funksiyası müəyyən $U(0;r) \subset C$ dairəsində cəmlənib. Bu halda $z_0 \in C$ nöqtəsini qeyd etsək, ixtiyari $z \neq z_0$ üçün

$$(Bf)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in U(0;r): |z-w| > \varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} dm(w) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in U(0;r): |z-w| > \varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} dm(w) + \frac{1}{\pi} \int_{U(0;r)} \frac{f(w)}{(z-z_0)^2} dm(w) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in U(0;r): |z-w| > \varepsilon\}} (z_0 - w) \left[\frac{1}{(z-w)^2 (z-z_0)} + \frac{1}{(z-w)(z-z_0)^2} \right] f(w) dm(w)$$

bərabərliyindən $|z| > r_0 = 2\max\{r, |z_0|\}$ olduqda

$$|(Bf)(z)| \leq \frac{16}{\pi |z|^3} \int_{U(0;r)} |z_0 - w| |f(w)| dm(w) = \frac{k_0}{|z|^3} \tag{1.1.8}$$

qiymətləndirilməsini alarıq, burada

$$k_0 = \frac{16}{\pi} \int_{U(0;r)} |z_0 - w| |f(w)| dm(w).$$

(1.1.8) qiymətləndirməsindən isə

$$m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} \le m\{z \in C : |z| \le r_0\} + m\left\{z \in C : \frac{k_0}{|z|^3} > \lambda\right\} =$$

$$= m\{z \in C : |z| \le r_0\} + m\left\{z \in C : |z| < \sqrt[3]{\frac{k_0}{\lambda}}\right\} = \pi r_0^2 + \pi\left(\frac{k_0}{\lambda}\right)^{2/3}$$

bərabərsizliyi alınır ki, bu da baxılan halda (1.1.7) asimptotik bərabərliyinin ödənildiyini göstərir.

İndi isə lemmanı ümumi şəkildə isbat edək. $\int_C f(z)dm(z) = 0$ şərtindən alarıq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə f_1 və f_2 funksiyaları tapa bilərik ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

i) $f = f_1 + f_2$;

ii) f_1 funksiyası müəyyən $U(0;r) \subset C$ dairəsində cəmlənib və $\int_C f_1(z)dm(z) = 0$;

iii) f_2 funksiyası $\|f_2\|_{L_1} < \dfrac{\varepsilon}{4C_1}$ münasibətini ödəyir, burada C_1 (1.0.2) bərabərsizliyindəki sabitdir.

ii) şərtinə əsasən f_1 funksiyası $U(0;r) \subset C$ dairəsində cəmlənib $\int_C f_1(z)dm(z) = 0$ şərtini ödədiyindən lemmanın isbat etdiyimiz hissəsinə əsasən f_1 funksiyası üşün (1.1.7) asimptotik bərabərliyi ödənilir. Buna görə də elə $\lambda(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, ixtiyari $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$ üçün

$$\lambda m\left\{z \in C : |(Bf_1)(z)| > \frac{\lambda}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.1.9}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Digər tərəfdən iii) şərtinə və (1.0.2) bərabərsizliyinə əsasən ixtiyari $\lambda > 0$ üçün

$$\lambda m\left\{z \in C : |(Bf_2)(z)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le 2C_1 \|f_2\|_{L_1(C)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.1.10}$$

bərabərsizliyi də ödənilir. Onda (1.1.9) və (1.1.10) bərabərsizlikləri və

$$\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} \subset \left\{z \in C : |(Bf_1)(z)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{z \in C : |(Bf_2)(z)| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

münasibətindən alarıq ki, ixtiyari $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$ üçün

$$\lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} \leq$$

$$\leq \lambda m\left\{z \in C : |(Bf_1)(z)| > \frac{\lambda}{2}\right\} + \lambda m\left\{z \in C : |(Bf_2)(z)| > \frac{\lambda}{2}\right\} < \varepsilon$$

olur. Bu isə onu göstərir ki, (1.1.7) asimptotik bərabərliyi ixtiyari $f \in L_1(C)$ funksiyası üçün ödənilir. Lemma isbat olundu.

Teorem 1.1.2-nin isbatı. $\int\limits_C f(z)dm(z) = 0$ halında teoremin hökmü lemma 1.1.1-dən birbaşa alınır.

$$\int\limits_C f(z)dm(z) = \eta \neq 0$$

halına baxaq.

$$f_1(z) = \frac{\eta}{\pi}\chi_{(U(0;1))}(z), \qquad f_2(z) = f(z) - f_1(z)$$

işarə edək, burada $\chi(U(0;1))$ ilə $U(0;1)$ vahid dairəsinin xarakteristik funksiyası işarə olunub. Onda

$$\int\limits_C f_2(z)dm(z) = \int\limits_C f(z)dm(z) - \int\limits_C f_1(z)dm(z) = \eta - \frac{\eta}{\pi}\int\limits_{U(0;1)} dm(z) = 0$$

olduğundan lemma 1.1.1-ə əsasən

$$m\{z \in C : |(Bf_2)(z)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \quad \lambda \to 0+ \tag{1.1.11}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir. İxtiyari $|z|>2$ nöqtəsi üçün

$$\left|(Bf_1)(z)\right| = \frac{|\eta|}{\pi^2}\left|\int_{U(0;1)}\frac{dm(w)}{(z-w)^2}\right| \le \frac{|\eta|}{\pi}\cdot\frac{1}{(|z|-1)^2},$$

$$\left|(Bf_1)(z)\right| = \frac{|\eta|}{\pi^2}\left|\int_{U(0;1)}\frac{dm(w)}{(z-w)^2}\right| = \frac{|\eta|}{\pi^2}\left|\int_{U(0;1)}\frac{dm(w)}{(|z|-w)^2}\right| \ge$$

$$\ge \frac{|\eta|}{\pi^2}\operatorname{Re}\left(\int_{U(0;1)}\frac{dm(w)}{(|z|-w)^2}\right) \ge \frac{|\eta|}{\pi}\cdot\frac{(|z|-1)^2}{(|z|+1)^4}$$

bərabərsizlikləri ödənildiyindən ixtiyari $0<\lambda<\dfrac{|\eta|}{49\pi}$ üçün

$$m\{z\in C:\left|(Bf_1)(z)\right|>\lambda\} \le m\{z\in C:|z|\le 2\} + m\left\{z\in C:\frac{|\eta|}{\pi}\cdot\frac{1}{(|z|-1)^2}>\lambda\right\} =$$

$$= 4\pi + m\left\{z\in C:|z|<1+\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\} = 4\pi + \pi\left(1+\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right)^2, \qquad (1.1.12)$$

$$m\{z\in C:\left|(Bf_1)(z)\right|>\lambda\} \ge m\left\{|z|\ge 2:\ \frac{|\eta|}{\pi}\cdot\frac{(|z|-1)^2}{(|z|+1)^4}>\lambda\right\} =$$

$$= m\left\{|z|\ge 2:\ \frac{(|z|+1)^2}{|z|-1}<\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\} = m\left\{|z|\ge 2:\ |z|+3+\frac{4}{|z|-1}<\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\} \ge$$

$$\ge m\left\{|z|\ge 2:\ |z|+7<\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\} \ge \pi\left(\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}-7\right)^2 - 4\pi \qquad (1.1.13)$$

bərabərsizliklərinin ödənildiyini alarıq. (1.1.12) və (1.1.13) bərabərsizliklərindən $\lambda\to 0+$ şərti daxilində limitə keçməklə alarıq ki,

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda m\{z\in C:\left|(Bf_1)(z)\right|>\lambda\} = |\eta| \qquad (1.1.14)$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir. İxtiyari $0<\varepsilon<1$ üçün

$$\left\{z \in C : \left|(Bf_1)(z)\right| > (1+\varepsilon)\lambda\right\} \setminus \left\{z \in C : \left|(Bf_2)(z)\right| > \varepsilon\lambda\right\} \subset$$
$$\subset \left\{z \in C : \left|(Bf)(z)\right| > \lambda\right\} \subset$$
$$\subset \left\{z \in C : \left|(Bf_2)(z)\right| > \varepsilon\lambda\right\} \cup \left\{z \in C : \left|(Bf_1)(z)\right| > (1-\varepsilon)\lambda\right\}$$

münasibətləri və (1.1.11), (1.1.14) asimptotik bərabərliklərinə əsasən alarıq ki,

$$\frac{|\eta|}{1+\varepsilon} \le \liminf_{\lambda \to 0+} \lambda \cdot m\left\{z \in C : \left|(Bf)(z)\right| > \lambda\right\} \le$$
$$\le \limsup_{\lambda \to 0+} \lambda \cdot m\left\{z \in C : \left|(Bf)(z)\right| > \lambda\right\} \le \frac{|\eta|}{1-\varepsilon}$$

bərabərsizlikləri ödənir. Burada isə $0<\varepsilon<1$ ədədi ixtiyari olduğundan alarıq ki, (1.1.6) asimptotik bərabərliyi ödənilir. Teorem isbat olundu.

1.2. Modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$.

$$(B_\Omega f)(z) = B(\chi_\Omega f)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in \Omega : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2}\, dm(w), \quad z \in \Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir, burada χ_Ω – Ω çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdar. $1<p<\infty$ olduqda Alfors-Beurlinq çevirməsi $L_p(C)$ fəzasında məhdud operator olduğundan alarıq ki, modifikasiya olumuş Alfors-Beurlinq çevirməsi də $L_p(\Omega)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni elə $C_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(\Omega)$ üçün

$$\|B_\Omega f\|_{L_p(\Omega)} \le C_p \|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.2.1}$$

bərabərsizliyi ödənilir. $p = 1$ halında, yəni $f \in L_1(\Omega)$ olduqda isə yalnız

$$m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} \le \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_1(\Omega)}, \quad \lambda > 0 \tag{1.2.2}$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir.

Teorem 1.1.1-dən nəticə kimi alarıq ki, modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyası üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1.2.1. Fərz edək ki, $f \in L_1(\Omega)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} = 0 \tag{1.2.3}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Doğurdan da, ixtiyari $f \in L_1(\Omega)$ funksiyası üçün modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsinin tərifinə və teorem 1.1.1-ə əsasən alarıq ki,

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} \le \overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\{z \in C : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} =$$

$$= \overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\{z \in \Omega : |B(\chi_\Omega f)(z)| > \lambda\} = 0 .$$

Buradan isə (1.2.3) asimptotik bərabərliyi alınır. Teorem isbat olundu.

$\Omega \subset C$ çoxluğu üçün

$$d^*(\Omega) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(\Omega \cap U(0;r))}{m(U(0;r))}, \quad d_*(\Omega) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(\Omega \cap U(0;r))}{m(U(0;r))}$$

işarə edək. Aydındır ki, ixtiyari Ω çoxluğu üçün

$$0 \le d^*(\Omega) \le d_*(\Omega) \le 1$$

bərabərsizliyi ödənilir. Xüsusi halda, əgər Ω çoxluğu məhduddursa, onda

$$d^*(\Omega) = d_*(\Omega) = 0$$

olar.

Teorem 1.2.2. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$. Onda

$$\limsup_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} = d^*(\Omega) \cdot \left| \int_\Omega f(z) dm(z) \right|, \tag{1.2.4}$$

$$\liminf_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} = d_*(\Omega) \cdot \left| \int_\Omega f(z) dm(z) \right| \tag{1.2.5}$$

asimptotik bərabərlikləri ödənilir.

İsbatı. $\int_\Omega f(z) dm(z) = 0$ halında lemma 1.1.1-ə əsasən

$$\liminf_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} \le \liminf_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in C : |(B_\Omega f)(z)| > \lambda\} =$$
$$= \liminf_{\lambda \to 0+} \lambda m\{z \in C : |B(\chi_\Omega f)(z)| > \lambda\} = 0$$

olduğundan bu halda (1.2.4) və (1.2.5) bərabərlikləri ödənilir.

$$\int_\Omega f(z) dm(z) = \eta \neq 0$$

halına baxaq. Ω oblastının ixtiyari z_0 daxili nöqtəsini götürək. Onda elə $\rho_0 > 0$ ədədi var ki, $U(z_0; \rho_0) \subset \Omega$ olar.

$$f_1(z) = \frac{\eta}{m(U(z_0; \rho_0))} \chi_{U(z_0; \rho_0)}(z), \quad f_2(z) = f(z) - f_1(z)$$

işarə edək. Onda

$$\int_{\Omega} f_2(z)dm(z) = \int_{\Omega} f(z)dm(z) - \int_{\Omega} f_1(z)dm(z) = \eta - \frac{\eta}{m(U(z_0;\rho_0))}\int_{U(z_0;\rho_0)} dm(z) = 0$$

olduğundan yuxarıdakı mühakimələrə əsasən

$$m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f_2)(z)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \quad \lambda \to 0+ \tag{1.2.6}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir. İxtiyari $|z - z_0| > 2\rho_0$ nöqtəsi üçün

$$|(B_\Omega f_1)(z)| = \frac{|\eta|}{\pi\, m(U(z_0;\rho_0))}\left|\int_{U(z_0;\rho_0)} \frac{dm(w)}{(z-w)^2}\right| \le \frac{|\eta|}{\pi} \cdot \frac{1}{(|z-z_0| - \rho_0)^2},$$

$$|(B_\Omega f_1)(z)| = \frac{|\eta|}{\pi\, m(U(z_0;\rho_0))}\left|\int_{U(z_0;\rho_0)} \frac{dm(w)}{(z-w)^2}\right| = \frac{|\eta|}{\pi\, m(U(z_0;\rho_0))}\left|\int_{U(0;\rho_0)} \frac{dm(w)}{(|z-z_0| - w)^2}\right| \ge$$

$$\ge \frac{|\eta|}{\pi\, m(U(z_0;\rho_0))} \operatorname{Re}\left(\int_{U(0;\rho_0)} \frac{dm(w)}{(|z-z_0| - w)^2}\right) \ge \frac{|\eta|}{\pi} \cdot \frac{(|z-z_0| - \rho_0)^2}{(|z-z_0| + \rho_0)^4}$$

bərabərsizlikləri ödənildiyindən ixtiyari $0 < \lambda < \dfrac{|\eta|}{49\pi\rho_0^2}$ üçün

$$m\{z \in \Omega : |(B_\Omega f_1)(z)| > \lambda\} \le$$

$$\le m\{z \in \Omega : |z - z_0| \le 2\rho_0\} + m\left\{z \in \Omega : \frac{|\eta|}{\pi} \cdot \frac{1}{(|z-z_0| - \rho_0)^2} > \lambda\right\} =$$

$$= 4\pi\rho_0^2 + m\left\{z \in \Omega : |z - z_0| < \rho_0 + \sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\} =$$

$$= 4\pi\rho_0^2 + \pi\left(\rho_0 + \sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right)^2 \frac{m\left(\Omega \cap U\left(z_0;\rho_0 + \sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right)\right)}{m\left(U\left(z_0;\rho_0 + \sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right)\right)}, \tag{1.2.7}$$

$$m\{z\in\Omega:|(B_\Omega f_1)(z)|>\lambda\}\geq m\left\{z\in\Omega:|z-z_0|\geq 2\rho_0\ \wedge\ \frac{|\eta|}{\pi}\cdot\frac{(|z-z_0|-\rho_0)^2}{(|z-z_0|+\rho_0)^4}>\lambda\right\}=$$

$$=m\left\{z\in\Omega:|z-z_0|\geq 2\rho_0\ \wedge\ \frac{(|z-z_0|+\rho_0)^2}{|z-z_0|-\rho_0}<\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\}=$$

$$=m\left\{z\in\Omega:|z-z_0|\geq 2\rho_0\ \wedge\ |z-z_0|+3\rho_0+\frac{4\rho_0^2}{|z-z_0|-1}<\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\}\geq$$

$$\geq m\left\{z\in\Omega:|z-z_0|\geq 2\rho_0\ \wedge\ |z-z_0|+7\rho_0<\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}\right\}\geq$$

$$\geq\pi\left(\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}-7\rho_0\right)^2\frac{m\left(\Omega\bigcap U\left(z_0;\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}-7\rho_0\right)\right)}{m\left(U\left(z_0;\sqrt{\frac{|\eta|}{\pi\lambda}}-7\rho_0\right)\right)}-4\pi\rho_0^2 \qquad (1.2.8)$$

bərabərsizliklərinin ödənildiyini alarıq. (1.2.7) və (1.2.8) bərabərsizliklərindən $\lambda\to 0+$ şərti daxilində limitə keçməklə alarıq ki,

$$\limsup_{\lambda\to 0+}\lambda m\{z\in\Omega:|(B_\Omega f_1)(z)|>\lambda\}=d^*(\Omega)\cdot|\eta|, \qquad (1.2.9)$$

$$\liminf_{\lambda\to 0+}\lambda m\{z\in\Omega:|(B_\Omega f_1)(z)|>\lambda\}=d_*(\Omega)\cdot|\eta| \qquad (1.2.10)$$

asimptotik bərabərlikləri ödənilir. İxtiyari $0<\varepsilon<1$ üçün

$$\{z\in\Omega:|(Bf_1)(z)|>(1+\varepsilon)\lambda\}\setminus\{z\in\Omega:|(Bf_2)(z)|>\varepsilon\lambda\}\subset$$

$$\subset\{z\in\Omega:|(Bf)(z)|>\lambda\}\subset$$

$$\subset\{z\in\Omega:|(Bf_2)(z)|>\varepsilon\lambda\}\bigcup\{z\in\Omega:|(Bf_1)(z)|>(1-\varepsilon)\lambda\}$$

münasibətləri və (1.2.6), (1.2.9), (1.2.10) asimptotik bərabərliklərinə əsasən alarıq ki,

$$d^*(\Omega)\cdot\frac{|\eta|}{1+\varepsilon}\le\limsup_{\lambda\to0+}\lambda\cdot m\{z\in\Omega:|(Bf)(z)|>\lambda\}\le d^*(\Omega)\cdot\frac{|\eta|}{1-\varepsilon},$$

$$d_*(\Omega)\cdot\frac{|\eta|}{1+\varepsilon}\le\liminf_{\lambda\to0+}\lambda\cdot m\{z\in\Omega:|(Bf)(z)|>\lambda\}\le d_*(\Omega)\cdot\frac{|\eta|}{1-\varepsilon}$$

bərabərsizlikləri ödənir. Burada isə $0<\varepsilon<1$ ədədi ixtiyari olduğundan alarıq ki, (1.2.4), (1.2.5) asimptotik bərabərlikləri ödənilir. Teorem isbat olundu.

1.3. A-inteqral və modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyi

$\Omega\subset C$ məhdud oblastında ölçülən kompleks qiymətli f funksiyası üçün

$[f(z)]_n=[f(z)]^n=f(z),\qquad |f(z)|\le n$ olduqda,

$[f(z)]_n=n\,\mathrm{sgn}\,f(z),\ [f(z)]^n=0,\qquad |f(z)|>n$ olduqda,

işarə edək, burada $n\in N$, $\mathrm{sgn}\,w=w/|w|$, $w\ne0$ olduqda və $\mathrm{sgn}\,0=0$.

1929-cu ildə E.Titçmarş [112] tərəfindən Ω oblastında ölçülən funksiyalar üçün Q- və Q'-inteqral anlayışları daxil edilmişdir.

Tərif 1.3.1. Əgər sonlu

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega[f(z)]_n\,dm(z)$$

(uyğun olaraq $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega[f(z)]^n\,dm(z)$)

limiti varsa, onda f funksiyasına Ω oblastında Q-*inteqrallanan* (uyğun olaraq Q'-*inteqrallanan*) funksiya deyilir və $f\in Q(\Omega)$ $\left(f\in Q'(\Omega)\right)$ kimi işarə olunur. Bu lmitin qiyməti isə f funksiyasının Q-*inteqralı* (Q'-*inteqralı*) adlanır və

$$(Q)\int_\Omega f(z)dm(z)\qquad\left((Q')\int_\Omega f(z)dm(z)\right)$$

kimi işarə olunur.

[112] məqaləsində E.Titçmarş göstərmişdir ki, Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Furye sıralarına qoşma sıraları tədqiq edərkən Q-inteqral daha təbii nəticələr verir. Lakin həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə Q-inteqral və Q'-inteqral anlayışlarının tətbiqini çətinləşdirən fakt bu inteqralların funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödəməməsidir, yəni iki funksiyanın Q-inteqrallanmasından (Q'-inteqrallanmasından) onların cəminin də Q-inteqrallanan (Q'-inteqrallanan) olması alınmır. Bundan əlavə cəm Q-inteqrallanan (Q'-inteqrallanan) olsa belə cəmin inteqralı inteqrallar cəminə bərabər olmaya da bilər. Lakin Q-inteqralın (Q'-inteqralın) tərifinə

$$m\{z \in \Omega : |f(z)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \qquad \lambda \to +\infty \tag{1.3.1}$$

şərtini əlavə etsək, onda Q- və Q'-inteqral anlayışları üst-üstə düşər və alınan funksiyalar sinfində funksiyalara nəzərən additivlik şərtini ödəyərlər.

Tərif 1.3.2. Əgər f funksiyası Ω oblastında Q-inteqrallanandırsa (və ya Q'-inteqrallanandırsa) və (1.3.1) şərti ödənilərsə, onda f funksiyasına Ω oblastında *A-inteqrallanan* funksiya deyilir və $f \in A(\Omega)$ kimi işarə olunur. Bu halda $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}[f(z)]_n\, dm(z)$ (və ya $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}[f(z)]^n\, dm(z)$) limitinin qiyməti isə f funksiyasının *A-inteqralı* adlanır və

$$(A)\int\limits_{\Omega} f(z)\,dm(z)$$

kimi işarə olunur.

Q- və Q'-inteqralların xassələri [7, 28-30, 59, 63, 112] işlərində, A-, Q- və Q'-inteqralların həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə tətbiqləri isə [6-10, 12-18, 20-27, 31-35, 37-41, 43-50, 56-68, 99, 109, 117, 118] işlərində geniş tədqiq olunub.

Sinqulyar inteqral operatorların xassələrinə əsasən (bax, məsələn, [111]) alarıq ki, ixtiyari $\Omega \subset C$ ölçülən çoxluğu üçün $f \in L_p(\Omega)$, $p > 1$ və $g \in L_q(\Omega)$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ olarsa, onda

$$\int_{\Omega} g(z)(B_{\Omega} f)(z)dm(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\{w,z\in\Omega:|z-w|>\varepsilon\}} \frac{f(w)g(z)}{(z-w)^2} dm(w)dm(z) =$$

$$= \int_{\Omega} f(z)(B_{\Omega} g)(z)dm(z) \qquad (1.3.2)$$

bərabərliyi ödənilir. Bu bərabərliyə Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyi (bəzənsə hissə-hissə inteqrallama düsturu) deyilir. Biz bu yarımfəsildə göstərəcəyik ki, $\Omega \subset C$ məhdud oblast olarsa, onda $f \in L_1(\Omega)$ funksiyasının Alfors- Beurlinq çevirməsi Ω oblastında A-inteqrallanandır və (1.3.2) bərabərliyinin analoqu ödənilir.

Teorem 1.3.1. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə məhdud oblastdır, $f \in L_1(\Omega)$ və $g(z)$ funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $(B_{\Omega} g)(z)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(z)\cdot(B_{\Omega} f)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_{\Omega} g(z)(B_{\Omega} f)(z)dm(z) = \int_{\Omega} f(z)(B_{\Omega} g)(z)dm(z) \qquad (1.3.3)$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. A-inteqral funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödədiyi üçün fərz edə bilərik ki, f funksiyası Ω oblastında verilmiş həqiqi funksiyadır, ixtiyari $z \in \Omega$ üçün $f(z) \geq 0$ və

$$\max_{z\in\Omega}\{|g(z)|, |(B_{\Omega} g)(z)|\} \leq 1$$

bərabərsizlikləri ödənilir. İxtiyari $z \notin \Omega$ üçün $f(z) = 0$ olduğunu qəbul edəcəyik.

Teoremin isbatı həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin köməkliyi ilə qoşma funksiyanın varlığının Bezikoviç [77] tərəfindən verilmiş birbaşa isbat üsuluna oxşar qaydada aparılacaq. Qoşma funksiyaların xassələrini tədqiq edərkən bu üsul Titçmarş [112] və Ulyanov [48] tərəfindən təkmilləşdirilmişdir. Qeyd edək ki, Bezikoviç-Titçmarş-Ulyanov üsulu yalnız bir həqiqi dəyişəndən asılı funksiyalara tətbiq oluna bilər, belə ki, bu üsulda istifadə olunan bəzi faktlar yalnız birdəyişənli halda ödənilir. Məsələn, bu üsulda ixtiyari açıq çoxluğun ən çoxu hesabi sayda kəsişməyən intervalların birləşməsi şəklində göstərilə bilməsindən istifadə olunur (bu çətinliyi aradan qaldırmaq üçün biz Vitalinin sonlu örtük haqqında lemmasından istifadə edəcəyik). Bu üsulu kompleks dəyişənli funksiyalara da tətbiq edə bilmək üçün biz konstuksiyanı bir qədər təkmilləşdirdik və isbatın sadəliyi üçün onu bir neçə addıma böldük.

1-ci addım. Biz bu hissədə isbatda bizə lazım olacaq G_p, L_n, L'_n, T_n çoxluqlarını və $\Phi_n(z)$, $\Phi_n^*(z)$ funksiyalarını qurub xassələrini öyrənəcəyik.

$$\Phi_n(z) = f(z) - [f(z)]^n$$

işarə edək. Onda $n \to \infty$ olduqda

$$\alpha_n = \int_\Omega \Phi_n(z)dm(z) \to 0$$

olar. $n \in N$ nömrəsini elə seçək ki, $\alpha_n < 1$ olsun. Tutaq ki,

$$E_n = \{z \in \Omega : f(z) > n\}.$$

İxtiyari $z \in E_n$ nöqtəsi üçün $\left\{ r > 0 : \int\limits_{U(z;r)} \Phi_n(w)dm(w) = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot n \right\} \neq \varnothing$ olduqda

$$r_z = \sup\left\{ r > 0 : \int\limits_{U(z;r)} \Phi_n(w)dm(w) = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot n \right\},$$

$\left\{ r > 0 : \int\limits_{U(z;r)} \Phi_n(w)dm(w) = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot n \right\} = \varnothing$ olduqda isə

$$r_z = 0$$

işarə edək. Qeyd edək ki, əgər $z \in E_n$ nöqtəsi $\Phi_n(z)$ funksiyasının Lebeq nöqtəsidirsə, onda $r_z > 0$ olur və buna görə də $E_n \setminus E'_n$ çoxluğu sıfır ölçülü çoxluqdur, burada $E'_n = \{z \in E_n : \ r_z > 0\}$.

$\{U(z;r_z)\}_{z\in E_n'}$ çoxluqlar sisteminə baxaq. Örtük haqqında teoremdən (bax, [88]) alınır ki, ən çoxu hesabi sayda elə $z_k \in E_n'$, $k \in I \subset N$ nöqtələri var ki, $U(z_k;r_{z_k})$, $k \in I$ dairələri cüt-cüt kəsişmirlər və

$$\bigcup_{z\in E_n'} U(z;r_z) \subset \bigcup_{k\in I} U(z_k;5r_{z_k})$$

münasibəti ödənilir.

$$G_1 = U(z_1;5r_{z_1}) \setminus \bigcup_{k>1} U(z_k;r_{z_k}),$$

$$G_p = U(z_p;5r_{z_p}) \setminus \left[\bigcup_{k=1}^{p-1} G_k \cup \left(\bigcup_{k>p} U(z_k;r_{z_k})\right)\right],\ p \ge 2,\ p \in I$$

işarə edək. Onda G_p, $p \in I$ çoxluqları cüt-cüt kəsişmirlər və

$$U(z_p;r_{z_p}) \subset G_p \subset U(z_p;5r_{z_p}),\ p \in I,$$

$$E_n' \subset \bigcup_{z\in E_n'} U(z;r_z) \subset \bigcup_{p\in I} G_p = \bigcup_{p\in I} U(z_p;5r_{z_p})$$

daxilolma münasibətləri ödənilir. $z \in G_p$, $p \in I$ olduqda

$$\Phi_n^*(z) = \frac{1}{m(G_p)} \int_{G_p} \Phi_n(w)\,dm(w)$$

və $z \in C \setminus \bigcup_{p\in I} G_p$ olduqda

$$\Phi_n^*(z) = 0$$

işarə edək. Onda ixtiyari $p \in I$ üçün

$$\int_{G_p} \Phi_n(z)\,dm(z) = \int_{G_p} \Phi_n^*(z)\,dm(z) \qquad (1.3.4)$$

olar. Qeyd edək ki, ixtiyari $z \in G_p$, $p \in I$ nöqtəsi üçün

$$0 \le \Phi_n^*(z) \le \frac{1}{m\left(U\left(z_p; r_{z_p}\right)\right)} \int_{U\left(z_p; 5r_{z_p}\right)} \Phi_n(w)\,dm(w) \le \frac{1}{\pi r_{z_p}^2} \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 25 r_{z_p}^2 \cdot n = \frac{25n}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$$L_n = \bigcup_{p \in I} G_p\,,\ L_n' = \bigcup_{p \in I} U\left(z_p; 10 r_{z_p}\right)$$

işarə edək. Onda

$$m(L_n) \le \sum_{p \in I} 25\pi r_{z_p}^2 \le 25 \cdot \frac{2}{n} \sum_{p \in I} \int_{U\left(z_p; r_{z_p}\right)} \Phi_n(w)\,dm(w) \le \frac{50}{n} \int_{\Omega} \Phi_n(w)\,dm(w) = \frac{50\alpha_n}{n},$$

$$m(L_n') \le \sum_{p \in I} 100\pi r_{z_p}^2 \le \frac{200\alpha_n}{n} \tag{1.3.5}$$

olar. Fərz edək ki, $T_n = \Omega \setminus L_n'$. Əvvəlcə göstərək ki,

$$\int_{T_n} \left| B_{\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(z) \right| dm(z) < 800 \cdot \alpha_n \tag{1.3.6}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$$h_n(z) = B_{\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(z)$$

işarə edək. İxtiyari $z \in T_n$ nöqtəsi üçün

$$|h_n(z)| = \frac{1}{\pi}\left| \int_{\Omega} \frac{\Phi_n(w) - \Phi_n^*(w)}{(z-w)^2}\,dm(w) \right| = \frac{1}{\pi}\left| \sum_{p \in I} \int_{G_p} \frac{\Phi_n(w) - \Phi_n^*(w)}{(z-w)^2}\,dm(w) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \sum_{p \in I} \left| \int_{G_p} \frac{\Phi_n(w)}{(z-w)^2}\,dm(w) - \int_{G_p} \frac{\Phi_n^*(w)}{(z-w)^2}\,dm(w) \right| \tag{1.3.7}$$

ödənilir. İnteqral üçün orta qiymət teoreminə əsasən alarıq ki, ixtiyari $p \in I$ üçün elə $w_p^{(i)}, \tilde{w}_p^{(i)} \in U\left(z_p; 5r_{z_p}\right)$, $i = \overline{1,2}$ nöqtələri var ki,

$$\int_{G_p} \frac{\Phi_n(w)}{(z-w)^2}\,dm(w) = \left[\operatorname{Re}\frac{1}{\left(z-w_p^{(1)}\right)^2} + i\operatorname{Im}\frac{1}{\left(z-w_p^{(2)}\right)^2}\right]\cdot \int_{G_p} \Phi_n(w)\,dm(w),$$

$$\int_{G_p} \frac{\Phi_n^*(w)}{(z-w)^2}\,dm(w) = \left[\operatorname{Re}\frac{1}{\left(z-\tilde{w}_p^{(1)}\right)^2} + i\operatorname{Im}\frac{1}{\left(z-\tilde{w}_p^{(2)}\right)^2}\right]\cdot \int_{G_p} \Phi_n^*(w)\,dm(w).$$

Onda (1.3.4) bərabərliyi və (1.3.7) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$|h_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\sum_{p\in I}\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{1}{\left(z-w_p^{(i)}\right)^2} - \frac{1}{\left(z-\tilde{w}_p^{(i)}\right)^2}\right|\cdot \int_{G_p}\Phi_n(w)\,dm(w). \tag{1.3.8}$$

İxtiyari $w, \tilde{w} \in U\left(z_p; 5r_{z_p}\right)$ və $z \in T_n$ üçün

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{(z-\tilde{w})^2}\right| = \frac{|w-\tilde{w}|\cdot|z-w+z-\tilde{w}|}{|z-w|^2\cdot|z-\tilde{w}|^2} \le \frac{80\cdot r_{z_p}}{\left|z-z_p\right|^3}$$

qiymətləndirilməsi ödənildiyi üçün (1.3.8) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$|h_n(z)| \le \frac{1}{\pi}\sum_{p\in I}\frac{160\cdot r_{z_p}}{\left|z-z_p\right|^3}\cdot\int_{G_p}\Phi_n(w)\,dm(w) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\sum_{p\in I}\frac{160\cdot r_{z_p}}{\left|z-z_p\right|^3}\cdot\left(\frac{1}{2}\pi\cdot 25 r_{z_p}^2\cdot n\right) = \sum_{p\in I}\frac{2000\cdot r_{z_p}^3\cdot n}{\left|z-z_p\right|^3}.$$

Buradan isə

$$\int_{T_n}|h_n(z)|\,dm(z) \le 2000\cdot n\cdot\sum_{p\in I} r_{z_p}^3\int_{T_n}\frac{dm(z)}{\left|z-z_p\right|^3} \le$$

$$\leq 2000 \cdot n \cdot \sum_{p \in I} r_{z_p}^3 \int_{\{z : |z - z_p| \geq 10 r_{z_p}\}} \frac{dm(z)}{|z - z_p|^3} =$$

$$= 2000 \cdot n \cdot \sum_{p \in I} r_{z_p}^3 \cdot 2\pi \int_{10 r_{z_p}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = 400\pi \cdot n \cdot \sum_{p \in I} r_{z_p}^2 =$$

$$= 400\pi \cdot n \cdot \frac{2\alpha_n}{\pi n} = 800 \cdot \alpha_n ,$$

yəni (1.3.6) bərabərsizliyinin ödənildiyini alarıq.

$f(z)$ funksiyasını

$$f(z) = [f(z)]^n + \Phi_n^*(z) + [\Phi_n - \Phi_n^*](z) \tag{1.3.9}$$

şəklində göstərək.

2-ci addım. Biz bu hissədə

$$\lim_{n \to \infty} \int_{T_n} g(z)(B_\Omega f)(z) dm(z) = \int_{\Omega} f(z)(B_\Omega g)(z) dm(z) \tag{1.3.10}$$

bərabərliyinin ödənildiyini göstərəcəyik.

$$\int_{T_n} g(z)(B_\Omega f)(z) dm(z) = \int_{T_n} g(z) \left\{ (B_\Omega [f]^n)(z) + (B_\Omega \Phi_n^*)(z) + B_\Omega (\Phi_n - \Phi_n^*)(z) \right\} dm(z) =$$

$$= \int_{T_n} g(z)(B_\Omega [f]^n)(z) dm(z) + \int_{T_n} g(z)(B_\Omega \Phi_n^*)(z) dm(z) +$$

$$+ \int_{T_n} g(z) B_\Omega (\Phi_n - \Phi_n^*)(z) dm(z) = S_1 + S_2 + S_3 \tag{1.3.11}$$

inteqralına baxaq. Kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar üçün (1.3.2) bərabərliyinə əsasən yaza bilərik ki,

$$S_1 = \int_{T_n} g(z)(B_\Omega [f]^n)(z) dm(z) = \int_{\Omega} g(z)(B_\Omega [f]^n)(z) dm(z) - \int_{L_n'} g(z)(B_\Omega [f]^n)(z) dm(z) =$$

$$= \int_{\Omega} [f(z)]^n (B_\Omega g)(z) dm(z) - \int_{L_n'} g(z)(B_\Omega [f]^n)(z) dm(z) = S_1^{(1)} + S_1^{(2)} .$$

Nəzərə alsaq ki,

$$\left|S_1^{(2)}\right| = \left|\int_{L_n'} g(z)\left(B_\Omega [f]^n\right)(z)dm(z)\right| \le \int_{L_n'} \left|\left(B_\Omega [f]^n\right)(z)\right| dm(z) \le$$

$$\le \left[m(L_n')\cdot \int_\Omega \left(B_\Omega [f]^n\right)^2 (z)dm(z)\right]^{1/2} \le C_2\left[m(L_n')\cdot \int_\Omega \left([f(z)]^n\right)^2 dm(z)\right]^{1/2} \le$$

$$\le C_2\left[n\cdot m(L_n')\cdot \int_\Omega f(z)dm(z)\right]^{1/2}$$

olur, onda (1.3.5) qiymətləndirməsinə əsasən

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega [f(z)]^n (B_\Omega g)(z)dm(z) = \int_\Omega f(z)(B_\Omega g)(z)dm(z) \qquad (1.3.12)$$

olduğunu alarıq. S_2 inteqralını

$$S_2 = \int_{T_n} g(z)\left(B_\Omega \Phi_n^*\right)(z)dm(z) = \int_\Omega g(z)\left(B_\Omega \Phi_n^*\right)(z)dm(z) - \int_{L_n'} g(z)\left(B_\Omega \Phi_n^*\right)(z)dm(z) =$$

$$= \int_\Omega \Phi_n^*(z)(B_\Omega g)(z)dm(z) - \int_{L_n'} g(z)\left(B_\Omega \Phi_n^*\right)(z)dm(z) = S_2^{(1)} + S_2^{(2)}$$

şəklində göstərə bilərik.

$$\left|S_2^{(1)}\right| = \left|\int_\Omega \Phi_n^*(z)(B_\Omega g)(z)dm(z)\right| \le \int_\Omega \left|\Phi_n^*(z)(B_\Omega g)(z)\right| dm(z) \le$$

$$\le \int_\Omega \Phi_n^*(z)dm(z) = \int_\Omega \Phi_n(z)dm(z) = \alpha_n,$$

$$\left|S_2^{(2)}\right| = \left|\int_{L_n'} g(z)\left(B_\Omega \Phi_n^*\right)(z)dm(z)\right| \le \int_{L_n'} \left|\left(B_\Omega \Phi_n^*\right)(z)\right| dm(z) \le$$

$$\le \left[m(L_n')\cdot \int_\Omega \left(B_\Omega \Phi_n^*\right)^2 (z)dm(z)\right]^{1/2} \le C_2\left[m(L_n')\cdot \int_\Omega \left(\Phi_n^*(z)\right)^2 dm(z)\right]^{1/2} \le$$

$$\leq C_2\left[\frac{25}{2}n\cdot m(L'_n)\cdot\int_{\Omega}\Phi_n^*(z)dm(z)\right]^{1/2}=C_2\left[\frac{25}{2}n\cdot m(L'_n)\cdot\alpha_n\right]^{1/2}$$

olduğu üçün (1.3.5) qiymətləndirməsindən alarıq ki,

$$\lim_{n\to\infty}S_2=0. \tag{1.3.13}$$

S_3 inteqralını qiymətləndirmək üçün (1.3.6) bərabərsizliyindən istifadə edəcəyik:

$$|S_3|=\left|\int_{T_n}g(z)B_\Omega\left(\Phi_n-\Phi_n^*\right)(z)dm(z)\right|\leq\int_{T_n}\left|g(z)B_\Omega\left(\Phi_n-\Phi_n^*\right)(z)\right|dm(z)\leq$$

$$\leq\int_{T_n}\left|B_\Omega\left(\Phi_n-\Phi_n^*\right)(z)\right|dm(z)<800\cdot\alpha_n.$$

Buradan isə alırıq ki,

$$\lim_{n\to\infty}S_3=0. \tag{1.3.14}$$

(1.3.11), (1.3.12), (1.3.13) və (1.3.14) bərabərliklərindən isə (1.3.10) bərabərliyinin ödənildiyini alırıq.

3-cü addım. Biz bu hissədə

$$(A)\int_{\Omega}g(z)(B_\Omega f)(z)dm(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{T_n}g(z)(B_\Omega f)(z)dm(z) \tag{1.3.15}$$

bərabərliyinin ödənildiyini göstərəcəyik.

$$\int_{T_n}g(z)(B_\Omega f)(z)dm(z)-\int_{\Omega}\left[g(z)(B_\Omega f)(z)\right]^n dm(z)=-\int_{L'_n}\left[g(z)(B_\Omega f)(z)\right]^n dm(z)+$$

$$+\int_{T_n}\left\{g(z)(B_\Omega f)(z)-\left[g(z)(B_\Omega f)(z)\right]^n\right\}dm(z)=S^{(1)}+S^{(2)} \tag{1.3.16}$$

inteqrallar fərqinə baxaq.

$$\left|S^{(1)}\right| \le n \cdot m\left(L_n'\right)$$

bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$\lim_{n\to\infty} S^{(1)} = 0 \qquad (1.3.17)$$

bərabərliyi ödənilir.

$$\sigma_n = \left\{z \in \Omega : \left|g(z)(B_\Omega f)(z)\right| > n\right\}$$

işarə edək.

$$m\left\{z \in \Omega : \left|(B_\Omega f)(z)\right| > n\right\} = o(1/n), \; n \to \infty$$

münasibətinə əsasən

$$m(\sigma_n) = o(1/n), \; n \to \infty$$

olar. (1.3.6) bərabərsizliyi və (1.3.9) ayrılışından alarıq ki,

$$\left|S^{(2)}\right| \le \int_{T_n \cap \sigma_n} \left|g(z)(B_\Omega f)(z)\right| dm(z) \le \int_{T_n \cap \sigma_n} \left|(B_\Omega f)(z)\right| dm(z) \le$$

$$\le \int_{\sigma_n} \left|\left(B_\Omega [f]^n\right)(z)\right| dm(z) + \int_{\sigma_n} \left|\left(B_\Omega \Phi_n^*\right)(z)\right| dm(z) + \int_{T_n} \left|B_\Omega\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(z)\right| dm(z) \le$$

$$\le \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left(B_\Omega [f]^n\right)^2 (z) dm(z)\right]^{1/2} + \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left(B_\Omega \Phi_n^*\right)^2 (z) dm(z)\right]^{1/2} + 800 \cdot \alpha_n \le$$

$$\le C_2 \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left([f(z)]^n\right)^2 dm(z)\right]^{1/2} + C_2 \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left(\Phi_n^*(z)\right)^2 dm(z)\right]^{1/2} + 800 \cdot \alpha_n \le$$

$$\le C_2 \left[n \cdot m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega f(z) dm(z)\right]^{1/2} + C_2 \left[\frac{25}{2} n \cdot m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \Phi_n^*(z) dm(z)\right]^{1/2} + 800 \cdot \alpha_n .$$

Bu isə onu göstərir ki,

$$\lim_{n\to\infty} S^{(2)} = 0 \qquad (1.3.18)$$

bərabərliyi ödənilir. $g(z) \cdot (B_\Omega f)(z)$ funksiyası üçün (1.3.1) şərti teorem 1.2.1-ə əsasən ödənilir. Onda (1.3.16), (1.3.17) və (1.3.18) bərabərliklərindən (1.3.15) bərabərliyinin ödənildiyini alarıq.

(1.3.10) və (1.3.15) bərabərliklərindən isə (1.3.3) bərabərliyi alınır. Teorem isbat olundu.

Nəticə 1.3.1. Fərz edək ki, Ω – sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$. Onda $(B_\Omega f)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_{\Omega}(B_\Omega f)(z)dm(z) = \int_{\Omega} f(z)(B_\Omega 1)(z)dm(z) \tag{1.3.19}$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Doğrudan da, Ω – sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblast olduğundan $g(z)\equiv 1$ götürsək, $(B_\Omega g)(z)$ funksiyası da məhdud olar (bax: [5]), onda teorem 1.3.1-ə əsasən alarıq ki, $(B_\Omega f)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və (1.3.19) bərabərliyi ödənilir. Nəticə isbat olundu.

1.4. Q-inteqral və sonlu kompleks ölçünün Alfors-Beurlinq çevirməsi

Tərif 1.4.1. Fərz edək ki, $X \subset C$ çoxluğu verilmişdir. Əgər elə $\delta > 0$ ədədi varsa ki, ixtiyari $x, y \in X$ elementləri üçün $|x - y| \geq \delta$ bərabərsizliyi ödənilir, onda X çoxluğuna atomar çoxluq deyəcəyik.

Aydındır ki, atomar çoxluğun ən çoxu hesabi sayda elementi var.

Tərif 1.4.2. Əgər kompleks müstəvidə verilmiş ν ölçüsü atomar çoxluqda cəmlənibsə, onda ona atomar diskret ölçü deyəcəyik.

Aydındır ki, hər bir atomar diskret ölçü sinqulyardır.

Kompleks müstəvidə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülər çoxluğunu M_a ilə işarə edəcəyik.

Tərif 1.4.3. Fərz edək ki, $\mu \in M_a$ ölçüsü verilmişdir.

$$(B\mu)(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{w\in C:|z-w|>\varepsilon\}}\frac{d\mu(w)}{(z-w)^2}, \quad z\in C$$

funksiyasına μ ölçüsünün Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Aydındır ki, ixtiyari $\mu \in M_a$ ölçüsünün Alfors-Beurlinq çevirməsi sanki hər bir $z \in C$ nöqtəsində təyin olunub və əgər

$$d\mu(z) = f(z)dm(z) + d\mu_s(z), \ \operatorname{supp}\mu_s = X = \{z_j\}_{j\in J}, \ \mu_s(z_j) = \alpha_j, \ j\in J$$

olarsa, onda sanki hər yerdə

$$(B\mu)(z) = (Bf)(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{j\in J}\frac{\alpha_j}{(z_j - z)^2}$$

olar, burada μ_s μ ölçüsünün sinqulyar hissəsidir.

Teorem 1.4.1. Fərz edək ki, $\mu \in M_a$. Onda

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m\{z\in C : |(B\mu)(z)| > \lambda\} = \|\mu_s\| \tag{1.4.1}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir, burada μ_s μ ölçüsünün sinqulyar hissəsi, $\|\mu_s\|$ isə μ_s ölçüsünün tam variasiyasıdır.

Əvvəlcə aşağıdakı köməkçi lemmanı isbat edək.

Lemma 1.4.1. Əgər ν kompleks müstəvidə verilmiş sonlu atomar diskret ölçüdürsə, onda

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m\{z\in C : |(B\nu)(z)| > \lambda\} = \|\nu\| \tag{1.4.2}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Lemma 1.4.1-in isbatı. Fərz edək ki,

$$\operatorname{supp}\nu = \{z_j\}_{j\in J} \quad \text{və} \quad \nu(z_j) = \alpha_j, \ j\in J.$$

Aşağıdakı işarələmələri aparaq:

$$\delta_0 = \inf\{\rho(z,w) : \ z,w\in \operatorname{supp}\nu, \ z\neq w\} > 0, \quad K_0 = \bigcup_{j\in J} U\left(z_j; \frac{\delta_0}{4}\right).$$

İxtiyari $z \in C \setminus K_0$ nöqtəsi üçün

$$\left|(B\nu)(z)\right| = \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j\in J}\frac{\alpha_j}{\left(z_j - z\right)^2}\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{j\in J}\frac{\left|\alpha_j\right|}{\left|z_j - z\right|^2} \le \frac{16}{\pi\delta_0^2}\|\nu\|$$

bərabərsizliyindən alarıq ki, $\lambda > \frac{16}{\pi\delta_0^2}\|\nu\|$ olduqda $\left\{z \in C \setminus K_0 : \left|(B\nu)(z)\right| > \lambda\right\}$ çoxluğu boş çoxluqdur və buna görə də $\lambda > \frac{16}{\pi\delta_0^2}\|\nu\|$ olduqda

$$m\left\{z \in C \setminus K_0 : \left|(B\nu)(z)\right| > \lambda\right\} = 0 \qquad (1.4.3)$$

ödənir. İxtiyari $z \in U\left(z_{j_0}; \frac{\delta_0}{4}\right)$ üçün

$$\frac{1}{\pi}\left|\sum_{j\in J,\, j\neq j_0}\frac{\alpha_j}{\left(z_j - z\right)^2}\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{j\in J,\, j\neq j_0}\frac{\left|\alpha_j\right|}{\left|z_j - z\right|^2} \le \frac{16}{\pi\delta_0^2}\|\nu\|$$

qiymətləndirməsindən alarıq ki, ixtiyari $j_0 \in J$ üçün

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m\left\{z \in U\left(z_{j_0}; \frac{\delta_0}{4}\right) : \left|(B\nu)(z)\right| > \lambda\right\} =$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m\left\{z \in U\left(z_{j_0}; \frac{\delta_0}{4}\right) : \frac{1}{\pi}\frac{\left|\alpha_{j_0}\right|}{\left|z_{j_0} - z\right|^2} > \lambda\right\} = \left|\alpha_{j_0}\right| \qquad (1.4.4)$$

bərabərliyi ödənilir. (1.4.3) və (1.4.4) bərabərliklərindən isə

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m\left\{z \in C : \left|(B\nu)(z)\right| > \lambda\right\} =$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{j_0\in J}\lambda m\left\{z \in U\left(z_{j_0}; \frac{\delta_0}{4}\right) : \left|(B\nu)(z)\right| > \lambda\right\} = \sum_{j_0\in J}\left|\alpha_{j_0}\right| = \|\nu\|$$

olduğunu alarıq. Lemma isbat olundu.

Teorem 1.4.1-in isbatı. Fərz edək ki,

$$d\mu(z) = f(z)dm(z) + d\mu_s(z),$$

burada μ ölçüsünün sinqulyar hissəsi olan μ_s - sonlu atomar diskret ölçüdür. Onda lemma 1.4.1-ə əsasən

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda m\{z \in C : |(B\mu_s)(z)| > \lambda\} = \|\mu_s\| \tag{1.4.5}$$

və teorem 1.1.1-ə əsasən

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda m\{z \in C : |(Bf)(z)| > \lambda\} = 0 \tag{1.4.6}$$

bərabərlikləri ödənilir.

$$(B\mu)(z) = (Bf)(z) + (B\mu_s)(z)$$

olduğundan ixtiyari $0 < \varepsilon < 1$ üçün

$$\{z \in C : |(B\mu_s)(z)| > (1+\varepsilon)\lambda\} \setminus \{z \in C : |(Bf)(z)| > \varepsilon\lambda\} \subset$$

$$\subset \{z \in C : |(B\mu)(z)| > \lambda\} \subset$$

$$\subset \{z \in C : |(Bf)(z)| > \varepsilon\lambda\} \cup \{z \in C : |(B\mu_s)(z)| > (1-\varepsilon)\lambda\}$$

münasibətləri ödənilir. Bu münasibətlər və (1.4.5), (1.4.6) bərabərliklərindən alarıq ki,

$$\frac{\|\mu_s\|}{1+\varepsilon} \le \liminf_{\lambda\to 0+} \lambda \cdot m\{z \in C : |(B\mu)(z)| > \lambda\} \le$$

$$\le \limsup_{\lambda\to 0+} \lambda \cdot m\{z \in C : |(B\mu)(z)| > \lambda\} \le \frac{\|\mu_s\|}{1-\varepsilon}.$$

Burada $0 < \varepsilon < 1$ ədədi ixtiyari olduğundan alırıq ki, (1.4.1) asimptotik bərabərliyi ödənir. Teorem isbat olundu.

Tərif 1.4.4. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş məhdud oblastdır. $M(\Omega; C)$ ilə Ω oblastında ölçülən və sonlu

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot m\{z \in \Omega : |f(z)| > \lambda\}$$

limitlərinə malik f funksiyalar çoxluğunu işarə edək.

$M(\Omega;C)$ funksiyalar sinfində Q- və Q'-inteqrallanan funksiyaların bizə gələcəkdə lazım olacaq bəzi xassələrini qeyd edək.

Teorem 1.4.2 [12]. $M(\Omega;C)$ funksiyalar sinfində Q- və Q'-inteqral anlayışları üst-üstə düşürlər, yəni $f \in M(\Omega;C)$ funksiyasının Ω oblastında Q-inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt f funksiyasının Ω oblastında Q'-inteqrallanan olmasıdır və bu zaman

$$(Q)\int_{\Omega} f(z)dm(z) = (Q')\int_{\Omega} f(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Teorem 1.4.3 [12]. Əgər $f \in M(\Omega;C)$ funksiyası Ω oblastında Q'-inteqrallanan, g funksiyası isə Ω oblastında A-inteqrallanan olarsa, onda $f + g \in M(\Omega;C)$ funksiyası Ω oblastında Q'-inteqrallanandır və

$$(Q')\int_{\Omega} [f(z) + g(z)]dm(z) = (Q')\int_{\Omega} f(z)dm(z) + (A)\int_{\Omega} g(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticə 1.4.1 [12]. Əgər $f \in M(\Omega;C)$ funksiyası Ω oblastında Q-inteqrallanan, g funksiyası isə Ω oblastında A-inteqrallanan olarsa, onda $f + g \in M(\Omega;C)$ funksiyası Ω oblastında Q-inteqrallanandır və

$$(Q)\int_{\Omega} [f(z) + g(z)]dm(z) = (Q)\int_{\Omega} f(z)dm(z) + (A)\int_{\Omega} g(z)dm(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır. Ω oblastında cəmlənmiş, sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülər çoxluğunu $M_a(\Omega)$ ilə işarə edəcəyik. $\mu \in M_a(\Omega)$ ölçüsü üçün

$$\left(B_{\Omega}\mu\right)(z) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{w\in\Omega:|z-w|>\varepsilon\}}\frac{d\mu(w)}{(z-w)^2}, \quad z\in C$$

funksiyasına μ ölçüsünün modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi deyilir.

Teorem 1.4.4. Fərz edək ki, Ω – kompleks müstəvidə sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $\mu\in M_a(\Omega)$. Əgər g funksiyası Ω oblastının qapanmasında Hölder mənada kəsilməz funksiyadırsa, onda $\left(B_{\Omega}\mu\right)(z)g(z)$ funksiyası Ω oblastında Q'-inteqrallanandır və

$$(Q')\int_{\Omega} g(z)\left(B_{\Omega}\mu\right)(z)dm(z) = \int_{\Omega}\left(B_{\Omega}g\right)(z)d\mu(z) \tag{1.4.7}$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Fərz edək ki,

$$d\mu(z) = f(z)dm(z) + d\mu_s(z),$$

burada μ_s μ ölçüsünün sinqulyar hissəsidir. Əvvəlcə göstərək ki,

$$(Q')\int_{\Omega} g(z)\left(B_{\Omega}\mu_s\right)(z)dm(z) = \int_{\Omega}\left(B_{\Omega}g\right)(z)d\mu_s(z) \tag{1.4.8}$$

bərabərliyi ödənilir. g funksiyası Ω oblastının qapanmasında kəsilməz olduğundan məhduddur. Buna görə də, elə $M>0$ ədədi var ki, ixtiyari $z\in\Omega$ üçün $|g(z)|\le M$ bərabərsizliyi ödənilir. Ω məhdud çoxluq, μ_s bu çoxluqda cəmlənən atomar diskret ölçü olduğundan

$$\operatorname{supp}\mu_{\mathrm{s}} = \{z_k\}_{k=1}^{n} \subset \Omega$$

olar. Fərz edək ki, $\mu_s(z_k) = \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$.

$$G(z) = -\pi g(z)\left(B_{\Omega}\mu_s\right)(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(z_k - z)^2}g(z),$$

$$\delta_0 = \inf\left\{\rho(z_i, z_j) : z_i, z_j \in \operatorname{supp}\mu_{\mathrm{s}}\right\} > 0, \ \delta_1 = \frac{16nM\|\mu_s\|}{\delta_0^2}$$

və ixtiyari $\lambda > \delta_1$ üçün

$$K_{1,\lambda} = \bigcup_{k=1}^{n} U\left(z_k ; \sqrt{\frac{nM|\alpha_k|}{\lambda}} \right), \qquad K_{2,\lambda} = \bigcup_{k=1}^{n} U\left(z_k ; \sqrt{\frac{|\alpha_k||g(z_k)|}{\lambda + \delta_1}} \right)$$

işarə edək. Onda ixtiyari $\lambda > \delta_1$ üçün

$$\Omega \setminus K_{1,\lambda} \subset \{ z \in \Omega : |G(z) \le \lambda| \} \subset \Omega \setminus K_{2,\lambda}$$

və $\lambda \to +\infty$ olduqda

$$\int_{K_{1,\lambda} \setminus K_{2,\lambda}} |G(z)| dm(z) \le m(K_{1,\lambda} \setminus K_{2,\lambda}) \left(\delta_1 + (\lambda + \delta_1) \sum_{k: g(z_k) \ne 0} \frac{M}{|g(z_k)|} \right) +$$

$$+ \sum_{k: g(z_k) = 0} \int_{|z - z_k| \le \sqrt{\frac{nM|\alpha_k|}{\lambda}}} \frac{|g(z) - g(z_k)|}{|z - z_k|^2} |\alpha_k| dm(z) \to 0$$

münasibətlərindən alarıq ki, $(Q')\int_{\Omega} G(z) dm(z)$ inteqralı var və

$$(Q')\int_{\Omega} G(z) dm(z) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\{z \in \Omega : |G(z)| \le \lambda\}} G(z) dm(z) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\{z \in \Omega : |z - z_k| > \varepsilon\}} \frac{\alpha_k}{(z - z_k)^2} g(z) dm(z) =$$

$$= -\pi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (B_{\Omega} g)(z_k) = -\pi \int_{\Omega} (B_{\Omega} g)(z) d\mu_s(z),$$

yəni (1.4.8) bərabərliyi ödənilir. Onda teorem 1.4.1, teorem1.4.3, teorem 1.3.1 və (1.4.8) bərabərliyinə əsasən

$$(Q')\int_{\Omega} g(z)(B_{\Omega}\mu)(z) dm(z) =$$

$$= (Q')\int_{\Omega} g(z)(B_{\Omega}\mu_s)(z) dm(z) + (A)\int_{\Omega} g(z)(B_{\Omega} f)(z) dm(z) =$$

$$= \int_{\Omega} (B_{\Omega} g)(z) d\mu_s(z) + \int_{\Omega} (B_{\Omega} g)(z) f(z) dm(z) = \int_{\Omega} (B_{\Omega} g)(z) d\mu(z)$$

olar. Teorem isbat olundu.

Nəticə 1.4.2. Fərz edək ki, Ω – kompleks müstəvidə sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $\mu \in M_a(\Omega)$. Əgər g funksiyası Ω oblastının qapanmasında Hölder mənada kəsilməz funksiyadırsa, onda $(B_\Omega \mu)(z) g(z)$ funksiyası Ω oblastında Q-inteqrallanandır və

$$(Q)\int_\Omega g(z)(B_\Omega \mu)(z)dm(z) = \int_\Omega (B_\Omega g)(z)d\mu(z)$$

bərabərliyi ödənilir.

II FƏSİL

RİSS ÇEVİRMƏSİ VƏ ONUN BƏZİ XASSƏLƏRİ

Fərz edək ki, R^d fəzasında $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan, yəni $f \in L_p(R^d)$, $1 \leq p < \infty$ funksiyası verilmişdir.

$$R_j(f)(x) = \gamma_{(d)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{y \in R^d : |x-y| > \varepsilon\}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} f(y) dy, \ j \in \{1, 2, \ldots. d\}$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının j-ci dəyişənə nəzərən Riss çevirməsi deyilir, burada $\gamma_{(d)} = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}}$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ isə Eylerin Qamma funksiyasıdır. Riss çevrilməsi harmonik analizin əsas operatorlarından biridir. [42, 51, 75, 91, 94, 111]-də göstərilmişdir ki, Riss çevrilməsi elliptik tip xüsusi törəməli dierensial tənliklərin həlli zamanı mühüm rol oynayır.

Sinqulyar inteqral operatorlar nəzəriyyəsindən məlumdur ki (bax: [111]), $1 < p < \infty$ olduqda Riss çevirməsi $L_p(R^d)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni bu halda $f \in L_p(R^d)$ münasibətindən $R_j(f) \in L_p(R^d)$ münasibətinin ödənilməsi alınır və yalnız $p > 1$ ədədindən asılı olan elə $C_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(R^d)$ üçün

$$\|R_j f\|_{L_p(R^d)} \leq C_p \|f\|_{L_p(R^d)} \tag{2.0.1}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$p = 1$ halında, yəni $f \in L_1(R^d)$ olduqda isə yalnız

$$m\{x \in R^d : |(R_j f)(x)| > \lambda\} \leq \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_1(R^d)}, \quad \lambda > 0 \tag{2.0.2}$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir, burada C_1 f funksiyasından asılı olmayan sabit, $m\{x \in R^d : |(R_j f)(x)| > \lambda\}$, $\lambda > 0$ isə f funksiyasının Riss çevirməsinin paylanma funksiyasıdır.

[53, 74, 79, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 95,96, 101, 102, 119] məqalələrində R_j operatorunun digər klassik funksional fəzalarda (Sobolev, Besov, Kampanato, Morri və s.) məhdudluğu araşdırılmışdır.

Biz bu fəsildə R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirmələrinin paylanma funksiyalarının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikalarını verəcəyik, Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan A-inteqral anlayışından istifadə edərək modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqunu isbat edəcəyik.

2.1. R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları

Biz bu yarımfəsildə R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to 0+$ və $\lambda \to +\infty$ şərti daxilində asimptotikalarını tədqiq edəcəyik.

Teorem 2.1.1. Fərz edək ki, $f \in L_1(R^d)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{x \in R^d : |(R_j f)(x)| > \lambda\} = 0 \tag{2.1.1}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. $f \in L_1(R^d)$ olduğu üçün Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzlik xassəsinə əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi götürsək elə $n \in N$ və $r > 0$ ədədləri tapa bilərik ki,

$$\left\| f - [f]_r^n \right\|_{L_1(R^d)} \le \frac{\varepsilon}{4C_1} \tag{2.1.2}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada

$$[f]_r^n(x) = [f]^n \chi_{(U(0;r))}(x),$$

$$[f(x)]^n = f(x),\ |f(x)| \le n \text{ olduqda, } [f(x)]^n = 0,\ |f(x)| > n \text{ olduqda,}$$

$\chi_{(U(0;r))}(x)$ isə $U(0;r) = \{x \in R^d : |x| < r\}$ kürəsinin xarakteristik funksiyasıdır.

(2.0.2) və (2.1.2) bərabərsizliklərindən alarıq ki, ixtiyari $\lambda > 0$ ədədi üçün

$$m\left\{x \in R^d : \left|R_j\left(f - [f]_r^n\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{2C_1}{\lambda}\left\|f - [f]_r^n\right\|_{L_1(R^d)} \le \frac{\varepsilon}{2\lambda} \tag{2.1.3}$$

ödənilir. $[f]_r^n(x)$ funksiyası kompleks müstəvidə məhdud funksiya olduğundan $f \in L_1(R^d)$ münasibətindən alınır ki, ixtiyari $p \ge 1$ üçün $[f]_r^n \in L_p(R^d)$ münasibəti də ödənilir. Onda ixtiyari $p > 1$ üçün $R_j[f]_r^n \in L_p(R^d)$ olar.

$$F_1(x) = R_j[f]_r^n(x) \cdot \chi_{(U(0;2r))}(x), \quad F_2(x) = R_j[f]_r^n(x) \cdot \chi_{\left(R^d \setminus U(0;2r)\right)}(x)$$

işarə edək. $[f]_r^n$ funksiyasının Riss çevirməsini

$$R_j[f]_r^n(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

şəklində göstərə bilərik. $F_1(x)$ funksiyası $\overline{U(0;2r)}$ qapalı kürəsində, $F_2(x)$ funksiyası isə onun $R^d \setminus U(0;2r)$ tamamlayıcısında cəmlənib. İxtiyari $p > 1$ üçün $R_j[f]_r^n \in L_p(R^d)$ münasibətindən $F_1(x) \in L_p(R^d)$ münasibətinin də ödənildiyi alınır. $F_1(x)$ funksiyası məhdud çoxluqda cəmləndiyi üçün onda $F_1(x) \in L_1(R^d)$ olar. Buna görə də $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$\frac{\lambda}{4} m\{x \in R^d : |F_1(x)| > \lambda/4\} \le \int\limits_{\{x \in R^d : |F_1(x)| > \lambda/4\}} |F_1(x)| dx < \frac{\varepsilon}{8} \tag{2.1.4}$$

bərabərsizliyi ödəniləcək. Digər tərəfdən, ixtiyari $x \in R^d \setminus U(0;2r)$ nöqtəsi üçün

$$\left|R_j\left([f]_r^n\right)(x)\right| \le \gamma_{(d)} \int\limits_{U(0;r)} \frac{\left|[f]_r^n(y)\right|}{|x-y|^d} dy \le$$

$$\le \frac{\gamma_{(d)}}{r^d} \int\limits_{U(0;r)} \left|[f]_r^n(y)\right| dy = \frac{\gamma_{(d)}}{r^d} \left\|[f]_r^n\right\|_{L_1(R^d)} \le \frac{\gamma_{(d)}}{r^d} \|f\|_{L_1(R^d)}$$

bərabərsizliyindən alarıq ki, $F_2(x)$ funksiyası məhduddur. Buradan və (2.1.4) qiymətləndirməsindən alınır ki, $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$m\left\{x \in R^d : \left|R_j [f]_r^n(x)\right| > \lambda/2\right\} \le m\left\{x \in R^d : |F_1(x)| > \lambda/4\right\} < \frac{\varepsilon}{2\lambda} \qquad (2.1.5)$$

olur. İxtiyari $\lambda > 0$ ədədi üçün

$$\left\{x \in R^d : \left|(R_j f)(x)\right| > \lambda\right\} \subset \left\{x \in R^d : \left|R_j [f]_r^n(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in R^d : \left|R_j\left(f - [f]_r^n\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

münasibəti ödənildiyindən (2.1.3) və (2.1.5) bərabərsizliklərindən alarıq ki, $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$m\left\{x \in R^d : \left|(R_j f)(x)\right| > \lambda\right\} \le$$

$$\le m\left\{x \in R^d : \left|R_j [f]_r^n(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} + m\left\{x \in R^d : \left|R_j\left(f - [f]_r^n\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2\lambda} + \frac{\varepsilon}{2\lambda} = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

bərabərsizliyi ödənir. Bu isə (2.1.1) asimptotik bərabərliyinin ödənildiyini göstərir. Teorem isbat olundu.

Teorem 2.1.2. Fərz edək ki, $f \in L_1(R^d)$. Onda

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda m\{x\in R^d:|(R_j f)(x)|>\lambda\}=\gamma_{(d)}\theta_{(d)}\left|\int_{R^d} f(x)dx\right| \qquad (2.1.6)$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir, burada $\theta_{(d)}=\dfrac{2^d}{d\cdot(d-1)!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{d-1}{2}\right]}$ və $\left[\dfrac{d-1}{2}\right]$ ilə $\dfrac{d-1}{2}$ ədədinin tam hissəsi işarə olunub.

Teoremin isbatına keçməzdən əvvəl aşağıdakı köməkçi lemmanı isbat edək.

Lemma 2.1.1. Əgər $f\in L_1(R^d)$ və $\int_{R^d} f(x)dx=0$ olarsa, onda

$$m\{x\in R^d:|(R_j f)(x)|>\lambda\}=o(1/\lambda),\quad \lambda\to 0+ \qquad (2.1.7)$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Lemma 2.1.1-in isbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, f funksiyası müəyyən $U(0;r)\subset R^d$ dairəsində cəmlənib. Bu halda $|x|>2r$ şərtini ödəyən ixtiyari $x\in R^d$ nöqtəsi üçün

$$R_j(f)(x)=\gamma_{(d)}\int_{U(0;r)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}f(y)dy=$$

$$=\gamma_{(d)}\int_{U(0;r)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}f(y)dy-\gamma_{(d)}\int_{U(0;r)}\frac{x_j}{|x|^{d+1}}f(y)dy=$$

$$=\gamma_{(d)}\int_{U(0;r)}\left[\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}-\frac{x_j}{|x|^{d+1}}\right]f(y)dy$$

bərabərliyindən alarıq ki,

$$|R_j(f)(x)|\le\gamma_{(d)}\int_{U(0;r)}\left[|x_j|\frac{\left||x|^{d+1}-|x-y|^{d+1}\right|}{|x-y|^{d+1}|x|^{d+1}}+\frac{|y_j|}{|x-y|^{d+1}}\right]|f(y)|dy\le$$

$$\le\gamma_{(d)}\int_{U(0;r)}\left[|x_j|\cdot|y|\cdot\sum_{k=1}^{d+1}\frac{1}{|x-y|^{d+2-k}|x|^{k}}+\frac{|y_j|}{|x-y|^{d+1}}\right]|f(y)|dy\le\frac{c_0}{|x|^{d+1}} \qquad (2.1.8)$$

qiymətləndirilməsi ödənilir, burada

$$c_0 = \gamma_{(d)} r(d+2)2^{d+1}\|f\|_{L_1(R^d)}.$$

(2.1.8) qiymətləndirməsindən isə

$$m\{x \in R^d : |(R_j f)(x)| > \lambda\} \le m\{x \in R^d : |x| \le 2r\} + m\left\{x \in R^d : \frac{c_0}{|x|^{d+1}} > \lambda\right\} =$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \cdot (2r)^d + m\left\{x \in R^d : |x| < \sqrt[d+1]{\frac{c_0}{\lambda}}\right\} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \cdot \left[(2r)^d + \left(\frac{c_0}{\lambda}\right)^{\frac{d}{d+1}}\right]$$

bərabərsizliyi alınır ki, bu da baxılan halda (2.1.7) asimptotik bərabərliyinin ödənildiyini göstərir.

İndi isə lemmanı ümumi şəkildə isbat edək. $\int_{R^d} f(x)dx = 0$ şərtindən alarıq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə f_1 və f_2 funksiyaları tapa bilərik ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

i) $f = f_1 + f_2$;

ii) f_1 funksiyası müəyyən $U(0;r) \subset R^d$ dairəsində cəmlənib və $\int_{R^d} f_1(x)dx = 0$;

iii) f_2 funksiyası $\|f_2\|_{L_1(R^d)} < \frac{\varepsilon}{4C_1}$ münasibətini ödəyir, burada C_1 (2.0.2) bərabərsizliyindəki sabitdir.

ii) şərtinə əsasən f_1 funksiyası $U(0;r) \subset R^d$ dairəsində cəmlənib $\int_{R^d} f_1(x)dx = 0$ şərtini ödədiyindən lemmanın isbat etdiyimiz hissəsinə əsasən f_1 funksiyası üçün (2.1.7) asimptotik bərabərliyi ödənilir. Buna görə də elə $\lambda(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, ixtiyari $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$ üçün

$$\lambda m\left\{x \in R^d : |(R_j f_1)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.9}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Digər tərəfdən iii) şərtinə və (2.0.2) bərabərsizliyinə əsasən ixtiyari $\lambda > 0$ üçün

$$\lambda m\left\{x \in R^d : \left|\left(R_j f_2\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le 2C_1 \left\| f_2 \right\|_{L_1\left(R^d\right)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.10}$$

bərabərsizliyi də ödənilir. Onda (2.1.9) və (2.1.10) bərabərsizlikləri və

$$\left\{x \in R^d : \left|\left(R_j f\right)(x)\right| > \lambda\right\} \subset \left\{x \in R^d : \left|\left(R_j f_1\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in R^d : \left|\left(R_j f_2\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

münasibətindən alarıq ki, ixtiyari $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$ üçün

$$\lambda m\left\{x \in R^d : \left|\left(R_j f\right)(x)\right| > \lambda\right\} \le$$

$$\le \lambda m\left\{x \in R^d : \left|\left(R_j f_1\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} + \lambda m\left\{x \in R^d : \left|\left(R_j f_2\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} < \varepsilon$$

olur. Bu isə onu göstərir ki, (2.1.7) asimptotik bərabərliyi ixtiyari $f \in L_1\left(R^d\right)$ funksiyası üçün ödənilir. Lemma isbat olundu.

Teorem 2.1.2-nin isbatı. $\int_{R^d} f(x)dx = 0$ halında teoremin hökmü lemma 2.1.1-dən birbaşa alınır.

$$\int_{R^d} f(x)dx = \alpha \ne 0$$

halına baxaq.

$$f_1(x) = \alpha \eta_{(d)} \chi_{(U(0;1))}(x), \qquad f_2(x) = f(x) - f_1(x)$$

işarə edək, burada $\eta_{(d)} = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{d}{2}+1\right)}{\pi^{d/2}}$ və $\chi_{(U(0;1))}$ ilə $U(0;1)$ vahid dairəsinin xarakteristik funksiyası işarə olunub. Onda

$$\int_{R^d} f_2(x)dx = \int_{R^d} f(x)dx - \int_{R^d} f_1(x)dx = \alpha - \alpha\eta_{(d)} \int_{U(0;1)} dx = 0$$

olduğundan lemma 2.1.1-ə əsasən

$$m\{x\in R^d : |(R_j f_2)(x)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \quad \lambda \to 0+ \tag{2.1.11}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir. İxtiyari $x \in \{x \in R^d : x_j > 2\}$ nöqtəsi üçün

$$|R_j(f_1)(x)| = \eta_{(d)}\gamma_{(d)}|\alpha| \left| \int_{U(0;1)} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} dy \right| \le$$

$$\le \eta_{(d)}\gamma_{(d)}|\alpha| \left| \int_{U(0;1)} \frac{|x_j|+1}{||x|-1|^{d+1}} dy \right| = \gamma_{(d)}|\alpha| \frac{|x_j|+1}{||x|-1|^{d+1}} \le \gamma_{(d)}|\alpha| \frac{|x_j|}{||x|-1|^{d+1}} + \gamma_{(d)}|\alpha| \frac{2^d}{|x|^{d+1}},$$

$$|R_j(f_1)(x)| \ge \gamma_{(d)}|\alpha| \frac{|x_j|}{||x|+1|^{d+1}} - \gamma_{(d)}|\alpha| \frac{2^d}{|x|^{d+1}}$$

qiymətləndirmələri və ixtiyari $\lambda > 0$ üçün

$$m\left\{ x \in R^d : \frac{|x_j|}{|x|^{d+1}} > \lambda \right\} = \int_{\{x\in R^d : |x_j| > \lambda |x|^{d+1}\}} dx = \frac{\theta_{(d)}}{\lambda},$$

$$m\left\{ x \in R^d : \frac{1}{|x|^{d+1}} > \lambda \right\} = m\left\{ x \in R^d : |x| < \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{d+1}} \right\} = \frac{1}{\eta_{(d)}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{d+1}}$$

bərabərliklərindən $\lambda \to 0+$ şərti daxilində limitə keçməklə alarıq ki,

$$\limsup_{\lambda\to 0+} \lambda m\{x \in R^d : |(R_j f_1)(x)| > \lambda\} \ge \gamma_{(d)}\theta_{(d)}|\alpha|, \tag{2.1.12}$$

$$\liminf_{\lambda\to 0+} \lambda m\{x \in R^d : |(R_j f_1)(x)| > \lambda\} \le \gamma_{(d)}\theta_{(d)}|\alpha| \tag{2.1.13}$$

bərabərsizlikləri ödənir. (2.1.12), (2.1.13) bərabərsizliklərindən isə alarıq ki, $\lim\limits_{\lambda\to 0+} \lambda m\{x \in R^d : |(R_j f_1)(x)| > \lambda\}$ limiti var və

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda m\{x \in R^d : |(R_j f_1)(x)| > \lambda\} = \gamma_{(d)}\theta_{(d)}|\alpha| \tag{2.1.14}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir. İxtiyari $0<\varepsilon<1$ üçün

$$\left\{x\in R^d:\left|\left(R_j f_1\right)(x)\right|>(1+\varepsilon)\lambda\right\}\setminus\left\{x\in R^d:\left|\left(R_j f_2\right)(x)\right|>\varepsilon\lambda\right\}\subset$$
$$\subset\left\{x\in R^d:\left|\left(R_j f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\subset$$
$$\subset\left\{x\in R^d:\left|\left(R_j f_2\right)(x)\right|>\varepsilon\lambda\right\}\cup\left\{x\in R^d:\left|\left(R_j f_1\right)(x)\right|>(1-\varepsilon)\lambda\right\}$$

münasibətləri və (2.1.11), (2.1.14) asimptotik bərabərliklərinə əsasən alarıq ki,

$$\frac{\gamma_{(d)}\theta_{(d)}|\alpha|}{1+\varepsilon}\le\liminf_{\lambda\to0+}\lambda\cdot m\left\{x\in R^d:\left|\left(R_j f\right)(z)\right|>\lambda\right\}\le$$
$$\le\limsup_{\lambda\to0+}\lambda\cdot m\left\{x\in R^d:\left|\left(R_j f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\le\frac{\gamma_{(d)}\theta_{(d)}|\alpha|}{1-\varepsilon}$$

bərabərsizlikləri ödənir. Burada isə $0<\varepsilon<1$ ədədi ixtiyari olduğundan alarıq ki, (2.1.6) asimptotik bərabərliyi ödənilir. Teorem isbat olundu.

2.2. Modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi

Fərz edək ki, Ω R^d fəzasında verilmiş oblastdır və $f\in L_1(\Omega)$.

$$\left(R_{j,\Omega}f\right)(x)=R_j\left(\chi_\Omega f\right)(x)=\gamma_{(d)}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{y\in\Omega:|x-y|>\varepsilon\}}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}f(y)dy,\ j=1,2,\dots,d,\quad z\in\Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi deyilir, burada χ_Ω – Ω çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır. $1<p<\infty$ olduqda Riss çevirməsi $L_p\left(R^d\right)$ fəzasında məhdud operator olduğundan alarıq ki, modifikasiya olumuş Riss çevirməsi də $L_p(\Omega)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni elə $C_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(\Omega)$ üçün

$$\|R_{j,\Omega} f\|_{L_p} \le C_p \|f\|_{L_p} \tag{2.2.1}$$

bərabərsizliyi ödənilir. $p=1$ halında, yəni $f \in L_1(\Omega)$ olduqda isə yalnız

$$m\{x \in \Omega : |(R_{j,\Omega} f)(x)| > \lambda\} \le \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_1}, \quad \lambda > 0 \tag{2.2.2}$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir.

Teorem 2.1.1-dən nəticə kimi alarıq ki, modifikasiya olunmuş Riss çevirməsinin paylanma funksiyası üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2.2.1. Fərz edək ki, $f \in L_1(\Omega)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\{x \in \Omega : |(R_{j,\Omega} f)(x)| > \lambda\} = 0 \tag{2.2.3}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Doğurdan da, ixtiyari $f \in L_1(\Omega)$ funksiyası üçün modifikasiya olunmuş Riss çevirməsinin tərifinə və teorem 2.1.1-ə əsasən alarıq ki,

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\{x \in \Omega : |(R_{j,\Omega} f)(z)| > \lambda\} \le \overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\{x \in R^d : |(R_{j,\Omega} f)(x)| > \lambda\} =$$

$$= \overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\{x \in \Omega : |R_j(\chi_\Omega f)(x)| > \lambda\} = 0 .$$

Buradan isə (2.2.3) asimptotik bərabərliyi alınır. Teorem isbat olundu.

2.3. A-inteqral və modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyi

$\Omega \subset R^d$ məhdud oblastında ölçülən f funksiyası üçün

$[f(x)]_n = [f(x)]^n = f(x), \qquad |f(x)| \le n$ olduqda,

$[f(x)]_n = n \operatorname{sgn} f(x), \; [f(x)]^n = 0, \qquad |f(x)| > n$ olduqda, işarə edək, burada $n \in N$.

Kompleks müstəvidə ölçülən funksiyalar üçün Q- və Q'-inteqral anlayışlarına analoji yolla $\Omega \subset R^d$ oblastında ölçülən funksiyalar üçün də Q- və Q'-inteqral anlayışlarını daxil edək.

Tərif 2.3.1. Əgər sonlu

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(x)]_n\,dx$$

$$\text{(uyğun olaraq } \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(x)]^n\,dx\text{)}$$

limiti varsa, onda f funksiyasına Ω oblastında Q-*inteqrallanan* (uyğun olaraq Q'-*inteqrallanan*) funksiya deyilir və $f \in Q(\Omega)$ $(f \in Q'(\Omega))$ kimi işarə olunur. Bu lmitin qiyməti isə f funksiyasının Q-*inteqralı* (Q'-*inteqralı*) adlanır və

$$(Q)\int_{\Omega} f(x)dx \qquad \left((Q')\int_{\Omega} f(x)dx\right)$$

kimi işarə olunur.

$\Omega \subset R^d$ oblastında ölçülən funksiyalar üçün də Q- və Q'-inteqrallar funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödəmirlər. Lakin Q-inteqralın (Q'-inteqralın) tərifinə

$$m\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \qquad \lambda \to +\infty \tag{2.3.1}$$

şərtini əlavə etsək, onda Q- və Q'-inteqral anlayışları üst-üstə düşər və alınan funksiyalar sinfində funksiyalara nəzərən additivlik şərtini ödəyərlər.

Tərif 2.3.2. Əgər f funksiyası $\Omega \subset R^d$ məhdud oblastında Q-inteqrallanandırsa (və ya Q'-inteqrallanandırsa) və (2.3.1) şərti ödənilərsə, onda f funksiyasına Ω oblastında A-*inteqrallanan* funksiya deyilir və $f \in A(\Omega)$ kimi işarə olunur. Bu halda $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(x)]_n\,dx$ (və ya $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(x)]^n\,dx$) limitinin qiyməti isə f funksiyasının A-*inteqralı* adlanır və

$$(A)\int_{\Omega} f(x)dx$$

kimi işarə olunur.

Sinqulyar inteqral operatorların xassələrinə əsasən (bax, məsələn, [111]) alarıq ki, ixtiyari $\Omega \subset R^d$ ölçülən çoxluğu üçün $f \in L_p(\Omega)$, $p > 1$ və $g \in L_q(\Omega)$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ olarsa, onda

$$\int_\Omega g(x)(R_{j,\Omega} f)(x)dx = \gamma_{(d)} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\{x,y \in \Omega : |x-y| > \varepsilon\}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} f(y) g(x) dy dx =$$

$$= -\int_\Omega f(x)(R_{j,\Omega} g)(x)dx \tag{2.3.2}$$

bərabərliyi ödənilir. Bu bərabərliyə Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyi (bəzənsə hissə-hissə inteqrallama düsturu) deyilir. Biz bu yarımfəsildə göstərəcəyik ki, $\Omega \subset R^d$ məhdud oblast olarsa, onda $f \in L_1(\Omega)$ funksiyasının Riss çevirməsi Ω oblastında A-inteqrallanandır və (2.3.2) bərabərliyinin analoqu ödənilir.

Teorem 2.3.1. Fərz edək ki, $\Omega \subset R^d$ məhdud oblastdır, $f \in L_1(\Omega)$ və $g(z)$ funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $(R_{j,\Omega} g)(x)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(x) \cdot (R_{j,\Omega} f)(x)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_\Omega g(x)(R_{j,\Omega} f)(x)dx = -\int_\Omega f(x)(R_{j,\Omega} g)(x)dx \tag{2.3.3}$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. A-inteqral funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödədiyi üçün fərz edə bilərik ki, f funksiyası Ω oblastında verilmiş həqiqi funksiyadır, ixtiyari $x \in \Omega$ üçün $f(x) \geq 0$ və

$$\max_{x \in \Omega} \{|g(x)|, |(R_{j,\Omega} g)(x)|\} \leq 1$$

bərabərsizlikləri ödənilir. İxtiyari $x \notin \Omega$ üçün $f(x) = 0$ olduğunu qəbul edəcəyik.

Teoremin isbatını birinci fəsildə isbat etdiyimiz teorem 1.3.1-in isbatına oxşar qaydada aparacağıq. İsbatın sadəliyi üçün onu bir neçə addıma bölürük.

1-ci addım. Biz bu hissədə isbatda bizə lazım olacaq G_p, L_n, L'_n, T_n çoxluqlarını və $\Phi_n(x)$, $\Phi_n^*(x)$ funksiyalarını qurub xassələrini öyrənəcəyik.

$$\Phi_n(x) = f(x) - [f(x)]^n$$

işarə edək. Onda $n \to \infty$ olduqda

$$\alpha_n = \int_\Omega \Phi_n(x)dx \to 0$$

olar. $n \in N$ nömrəsini elə seçək ki, $\alpha_n < 1$ olsun. Tutaq ki,

$$E_n = \{x \in \Omega : f(x) > n\}.$$

İxtiyari $x \in E_n$ nöqtəsi üçün $\left\{ r > 0 : \int_{B(x;r)} \Phi_n(y)dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} r^d \cdot n \right\} \neq \varnothing$ olduqda

$$r_x = \sup\left\{ r > 0 : \int_{B(x;r)} \Phi_n(y)dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} r^d \cdot n \right\},$$

$\left\{ r > 0 : \int_{B(x;r)} \Phi_n(y)dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} r^d \cdot n \right\} = \varnothing$ olduqda isə

$$r_x = 0$$

işarə edək. Qeyd edək ki, əgər $x \in E_n$ nöqtəsi $\Phi_n(x)$ funksiyasının Lebeq nöqtəsidirsə, onda $r_x > 0$ olur və buna görə də $E_n \setminus E'_n$ çoxluğu sıfır ölçülü çoxluqdur, burada $E'_n = \{x \in E_n : r_x > 0\}$.

$\{U(x;r_x)\}_{x \in E'_n}$ çoxluqlar sisteminə baxaq. Örtük haqqında teoremdən (bax, [88]) alınır ki, ən çoxu hesabi sayda elə $x_k \in E'_n$, $k \in I \subset N$ nöqtələri var ki, $U(x_k; r_{x_k})$, $k \in I$ dairələri cüt-cüt kəsişmirlər və

$$\bigcup_{x \in E'_n} U(x;r_x) \subset \bigcup_{k \in I} U(x_k; 5r_{x_k})$$

münasibəti ödənilir.

$$G_1 = U(x_1; 5r_{x_1}) \setminus \bigcup_{k>1} U(x_k; r_{x_k}),$$

$$G_p = U\left(x_p; 5r_{x_p}\right) \setminus \left[\bigcup_{k=1}^{p-1} G_k \cup \left(\bigcup_{k>p} U\left(x_k; r_{x_k}\right)\right)\right], \ p \geq 2, \ p \in I$$

işarə edək. Onda G_p, $p \in I$ çoxluqları cüt-cüt kəsişmirlər və

$$U\left(x_p; r_{x_p}\right) \subset G_p \subset U\left(x_p; 5r_{x_p}\right), \ p \in I,$$

$$E_n' \subset \bigcup_{x \in E_n} U\left(x; r_x\right) \subset \bigcup_{p \in I} G_p = \bigcup_{p \in I} U\left(x_p; 5r_{x_p}\right)$$

daxilolma münasibətləri ödənilir. $x \in G_p$, $p \in I$ olduqda

$$\Phi_n^*(x) = \frac{1}{m\left(G_p\right)} \int_{G_p} \Phi_n(y)\,dy$$

və $x \in R^d \setminus \bigcup_{p \in I} G_p$ olduqda

$$\Phi_n^*(x) = 0$$

işarə edək. Onda ixtiyari $p \in I$ üçün

$$\int_{G_p} \Phi_n(y)\,dy = \int_{G_p} \Phi_n^*(y)\,dy \qquad (2.3.4)$$

olar. Qeyd edək ki, ixtiyari $x \in G_p$, $p \in I$ nöqtəsi üçün

$$0 \leq \Phi_n^*(x) \leq \frac{1}{m\left(B\left(x_p; r_{x_p}\right)\right)} \int_{B\left(x_p; 5r_{x_p}\right)} \Phi_n(y)\,dy \leq \frac{\Gamma(1 + d/2)}{\pi^{d/2} r_{x_p}^d} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi^{d/2} \cdot 5^d r_{x_p}^d}{\Gamma(1 + d/2)} \cdot n = \frac{5^d n}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$$L_n = \bigcup_{p \in I} G_p, \ L_n' = \bigcup_{p \in I} B\left(x_p; 10r_{x_p}\right)$$

işarə edək. Onda

$$m\left(L_n\right) \leq \sum_{p \in I} \frac{\pi^{d/2} \cdot 5^d r_{x_p}^d}{\Gamma(1 + d/2)} \leq 5^d \cdot \frac{2}{n} \sum_{p \in I} \int_{B\left(x_p; r_{x_p}\right)} \Phi_n(y)\,dy \leq \frac{2 \cdot 5^d}{n} \int_{\Omega} \Phi_n(y)\,dy = \frac{2 \cdot 5^d \alpha_n}{n},$$

$$m(L_n') \le \sum_{p\in I} \frac{\pi^{d/2}\cdot 10^d\, r_{x_p}^d}{\Gamma(1+d/2)} \le \frac{2\cdot 10^d \alpha_n}{n} \tag{2.3.5}$$

olar. Fərz edək ki, $T_n = \Omega \setminus L_n'$. Əvvəlcə göstərək ki,

$$\int_{T_n} \left| R_{j,\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(x) \right| dx < C_2 \cdot \alpha_n \tag{2.3.6}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$$h_n(x) = R_{j,\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(x)$$

işarə edək. İxtiyari $x \in T_n$ nöqtəsi üçün

$$|h_n(x)| = \gamma_{(d)} \left| \int_\Omega \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} \left[\Phi_n(y) - \Phi_n^*(y)\right] dy \right| =$$

$$= \gamma_{(d)} \left| \sum_{p\in I} \int_{G_p} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} \left[\Phi_n(y) - \Phi_n^*(y)\right] dy \right| \le$$

$$\le \gamma_{(d)} \sum_{p\in I} \left| \int_{G_p} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} \Phi_n(y) dy - \int_{G_p} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} \Phi_n^*(y) dy \right| \tag{2.3.7}$$

ödənilir. İnteqral üçün orta qiymət teoreminə əsasən alarıq ki, ixtiyari $p \in I$ üçün elə $y^{(p)}, \tilde{y}^{(p)} \in B\left(x_p; 5r_{x_p}\right)$ nöqtələri var ki,

$$\int_{G_p} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} \Phi_n(y) dy = \frac{x_j - y_j^{(p)}}{\left|x - y^{(p)}\right|^{d+1}} \cdot \int_{G_p} \Phi_n(y) dy,$$

$$\int_{G_p} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} \Phi_n^*(y) dy = \frac{x_j - \tilde{y}_j^{(p)}}{\left|x - \tilde{y}^{(p)}\right|^{d+1}} \cdot \int_{G_p} \Phi_n^*(y) dy.$$

Onda (2.3.4) bərabərliyi və (2.3.7) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$|h_n(x)| \le \gamma_{(d)} \sum_{p\in I} \left| \frac{x_j - y_j^{(p)}}{\left|x - y^{(p)}\right|^{d+1}} - \frac{x_j - \tilde{y}_j^{(p)}}{\left|x - \tilde{y}^{(p)}\right|^{d+1}} \right| \cdot \int_{G_p} \Phi_n(y)dy. \qquad (2.3.8)$$

İxtiyari $y, \tilde{y} \in B\left(x_p; 5r_{x_p}\right)$ və $x \in T_n$ üçün

$$\left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{d+1}} - \frac{x_j - \tilde{y}_j}{|x-\tilde{y}|^{d+1}} \right| = \frac{\left|(x_j - y_j)\cdot|x-\tilde{y}|^{d+1} - (x_j - \tilde{y}_j)\cdot|x-y|^{d+1}\right|}{|x-y|^{d+1}\cdot|x-\tilde{y}|^{d+1}} \le$$

$$\le \frac{\left|(x_j - y_j)\cdot\left[|x-\tilde{y}|^{d+1} - |x-y|^{d+1}\right] - (y_j - \tilde{y}_j)\cdot|x-y|^{d+1}\right|}{|x-y|^{d+1}\cdot|x-\tilde{y}|^{d+1}} \le$$

$$\le \frac{|x_j - y_j| \cdot \big||x-\tilde{y}| - |x-y|\big| \cdot \sum_{k=0}^{d} |x-\tilde{y}|^k \cdot |x-y|^{d-k}}{|x-y|^{d+1}\cdot|x-\tilde{y}|^{d+1}} + \frac{|y_j - \tilde{y}_j|}{|x-\tilde{y}|^{d+1}} \le$$

$$\le \frac{(d+1)\cdot 10 r_{x_p} \cdot 2^{d+1}}{\left|x - x_p\right|^{d+1}} + \frac{10 r_{x_p} \cdot 2^{d+1}}{\left|x - x_p\right|^{d+1}} = \frac{10(d+2)\cdot 2^{d+1}\cdot r_{x_p}}{\left|x - x_p\right|^{d+1}}$$

qiymətləndirilməsi ödənildiyi üçün (2.3.8) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$|h_n(x)| \le \gamma_{(d)} \sum_{p\in I} \frac{10(d+2)\cdot 2^{d+1}\cdot r_{x_p}}{\left|x - x_p\right|^{d+1}} \cdot \int_{G_p} \Phi_n(y)dy \le$$

$$\le \gamma_{(d)} \sum_{p\in I} \frac{10(d+2)\cdot 2^{d+1}\cdot r_{x_p}}{\left|x - x_p\right|^{d+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} r_{x_p}^d \cdot n \right) = C_3 \cdot n \cdot \sum_{p\in I} \frac{r_{x_p}^{d+1}}{\left|x - x_p\right|^{d+1}},$$

burada $C_3 = \dfrac{\Gamma((d+1)/2)\cdot 10(d+2)\cdot 2^d}{\pi^{1/2}\cdot\Gamma(1+d/2)}$. Buradan isə

$$\int_{T_n} |h_n(x)|dx \le C_3 \cdot n \cdot \sum_{p\in I} r_{x_p}^{d+1} \int_{T_n} \frac{dx}{\left|x - x_p\right|^{d+1}} \le$$

$$\le C_3 \cdot n \cdot \sum_{p\in I} r_{x_p}^{d+1} \int\limits_{\left\{x\in R^d : \left|x-x_p\right|\ge 10 r_{x_p}\right\}} \frac{dx}{\left|x-x_p\right|^{d+1}} =$$

$$= C_3 \cdot n \cdot \sum_{p\in I} r_{x_p}^{d+1} \cdot \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int\limits_{10 r_{x_p}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{C_3 \pi^{d/2}}{5\Gamma(d/2)} \cdot n \cdot \sum_{p\in I} r_{x_p}^{d} =$$

$$= \frac{C_3 \pi^{d/2}}{5\Gamma(d/2)} \cdot n \cdot \frac{2\alpha_n}{n} \cdot \frac{\Gamma(1+d/2)}{\pi^{d/2}} = \frac{C_3 d}{5} \alpha_n ,$$

yəni (2.3.6) bərabərsizliyinin ödənildiyini alarıq.

$f(x)$ funksiyasını

$$f(x) = [f(x)]^n + \Phi_n^*(x) + [\Phi_n - \Phi_n^*](x) \tag{2.3.9}$$

şəklində göstərək.

2-ci addım. Biz bu hissədə

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{T_n} g(x)(R_{j,\Omega} f)(x)dx = -\int\limits_{\Omega} f(x)(R_{j,\Omega} g)(x)dx \tag{2.3.10}$$

bərabərliyinin ödənildiyini göstərəcəyik.

$$\int\limits_{T_n} g(x)(R_{j,\Omega} f)(x)dx = \int\limits_{T_n} g(x)\left\{(R_{j,\Omega}[f]^n)(x) + (R_{j,\Omega}\Phi_n^*)(x) + R_{j,\Omega}(\Phi_n - \Phi_n^*)(x)\right\}dx =$$

$$= \int\limits_{T_n} g(x)(R_{j,\Omega}[f]^n)(x)dx + \int\limits_{T_n} g(x)(R_{j,\Omega}\Phi_n^*)(x)dx + \int\limits_{T_n} g(x)R_{j,\Omega}(\Phi_n - \Phi_n^*)(x)dx =$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 \tag{2.3.11}$$

inteqralına baxaq. Kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar üçün (2.3.2) bərabərliyinə əsasən yaza bilərik ki,

$$S_1 = \int\limits_{T_n} g(x)(R_{j,\Omega}[f]^n)(x)dx = \int\limits_{\Omega} g(x)(R_{j,\Omega}[f]^n)(x)dx - \int\limits_{L_n'} g(x)(R_{j,\Omega}[f]^n)(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} [f(x)]^n (R_{j,\Omega} g)(x)dx - \int\limits_{L_n'} g(x)(R_{j,\Omega}[f]^n)(x)dx = S_1^{(1)} + S_1^{(2)}.$$

Nəzərə alsaq ki,

$$\left|S_1^{(2)}\right| = \left|\int_{L_n'} g(x)\left(R_{j,\Omega}[f]^n\right)(x)dx\right| \le \int_{L_n'}\left|\left(R_{j,\Omega}[f]^n\right)(x)\right|dx \le$$

$$\le \left[m(L_n')\cdot\int_{\Omega}\left(R_{j,\Omega}[f]^n\right)^2(x)dx\right]^{1/2} \le C^{(2)}\left[m(L_n')\cdot\int_{\Omega}\left([f(x)]^n\right)^2 dx\right]^{1/2} \le$$

$$\le C^{(2)}\left[n\cdot m(L_n')\cdot\int_{\Omega} f(x)dx\right]^{1/2}$$

olur, onda (2.3.5) qiymətləndirməsinə əsasən

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = -\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}[f(x)]^n\left(R_{j,\Omega}g\right)(x)dx = -\int_{\Omega} f(x)\left(R_{j,\Omega}g\right)(x)dx \tag{2.3.12}$$

olduğunu alarıq. S_2 inteqralını

$$S_2 = \int_{T_n} g(x)\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)(x)dx = \int_{\Omega} g(x)\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)(x)dx - \int_{L_n'} g(x)\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)(x)dx =$$

$$= -\int_{\Omega}\Phi_n^*(x)\left(R_{j,\Omega}g\right)(x)dx - \int_{L_n'} g(x)\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)(x)dx = S_2^{(1)} + S_2^{(2)}$$

şəklində göstərə bilərik.

$$\left|S_2^{(1)}\right| = \left|\int_{\Omega}\Phi_n^*(x)\left(R_{j,\Omega}g\right)(x)dx\right| \le \int_{\Omega}\left|\Phi_n^*(x)\left(R_{j,\Omega}g\right)(x)\right|dx \le$$

$$\le \int_{\Omega}\Phi_n^*(x)dx = \int_{\Omega}\Phi_n(x)dx = \alpha_n,$$

$$\left|S_2^{(2)}\right| = \left|\int_{L_n'} g(x)\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)(x)dx\right| \le \int_{L_n'}\left|\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)(x)\right|dx \le$$

$$\le \left[m(L_n')\cdot\int_{\Omega}\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)^2(x)dx\right]^{1/2} \le C^{(2)}\left[m(L_n')\cdot\int_{\Omega}\left(\Phi_n^*(x)\right)^2 dx\right]^{1/2} \le$$

$$\le C^{(2)}\left[\frac{5^d n}{2}\cdot m(L_n')\cdot\int_{\Omega}\Phi_n^*(x)dx\right]^{1/2} = C^{(2)}\left[\frac{5^d n}{2}\cdot m(L_n')\cdot\alpha_n\right]^{1/2}$$

olduğu üçün (2.3.5) qiymətləndirməsindən alarıq ki,

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = 0. \tag{2.3.13}$$

S_3 inteqralını qiymətləndirmək üçün (2.3.6) bərabərsizliyindən istifadə edəcəyik:

$$|S_3| = \left|\int_{T_n} g(x) R_{j,\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(x)dx\right| \le \int_{T_n} \left|g(x) R_{j,\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(x)\right| dx \le$$

$$\le \int_{T_n} \left|R_{j,\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(x)\right| dx < C_2 \cdot \alpha_n .$$

Buradan isə alırıq ki,

$$\lim_{n\to\infty} S_3 = 0. \tag{2.3.14}$$

(2.3.11), (2.3.12), (2.3.13) və (2.3.14) bərabərliklərindən isə (2.3.10) bərabərliyinin ödənildiyini alırıq.

3-cü addım. Biz bu hissədə

$$(A)\int_{\Omega} g(x)\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{T_n} g(x)\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)dx \tag{2.3.15}$$

bərabərliyinin ödənildiyini göstərəcəyik.

$$\int_{T_n} g(x)\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)dx - \int_{\Omega} \left[g(x)\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)\right]^n dx = -\int_{L_n'} \left[g(x)\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)\right]^n dx +$$

$$+ \int_{T_n} \left\{g(x)\left(R_{j,\Omega} f\right)(x) - \left[g(x)\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)\right]^n\right\} dx = S^{(1)} + S^{(2)} \tag{2.3.16}$$

inteqrallar fərqinə baxaq.

$$\left|S^{(1)}\right| \le n \cdot m\left(L_n'\right)$$

bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$\lim_{n\to\infty} S^{(1)} = 0 \tag{2.3.17}$$

bərabərliyi ödənilir.

$$\sigma_n = \{x \in \Omega : |g(x)(R_{j,\Omega} f)(x)| > n\}$$

işarə edək.

$$m\{x \in \Omega : |(R_{j,\Omega} f)(x)| > n\} = o(1/n),\ n \to \infty$$

münasibətinə əsasən

$$m(\sigma_n) = o(1/n),\ n \to \infty$$

olar. (2.3.6) bərabərsizliyi və (2.3.9) ayrılışından alarıq ki,

$$\left|S^{(2)}\right| \le \int_{T_n \cap \sigma_n} |g(x)(R_{j,\Omega} f)(x)| dx \le \int_{T_n \cap \sigma_n} |(R_{j,\Omega} f)(x)| dx \le$$

$$\le \int_{\sigma_n} \left|\left(R_{j,\Omega}[f]^n\right)(x)\right| dx + \int_{\sigma_n} \left|\left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)(x)\right| dx + \int_{T_n} \left|R_{j,\Omega}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(x)\right| dx \le$$

$$\le \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left(R_{j,\Omega}[f]^n\right)^2 (x) dx\right]^{1/2} + \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left(R_{j,\Omega}\Phi_n^*\right)^2 (x) dx\right]^{1/2} + C_2 \cdot \alpha_n \le$$

$$\le C^{(2)} \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left([f(x)]^n\right)^2 dx\right]^{1/2} + C^{(2)} \left[m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \left(\Phi_n^*(x)\right)^2 dx\right]^{1/2} + C_2 \cdot \alpha_n \le$$

$$\le C^{(2)} \left[n \cdot m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega f(x) dx\right]^{1/2} + C^{(2)} \left[\frac{5^d n}{2} \cdot m(\sigma_n) \cdot \int_\Omega \Phi_n^*(x) dx\right]^{1/2} + C_2 \cdot \alpha_n .$$

Bu isə onu göstərir ki,

$$\lim_{n \to \infty} S^{(2)} = 0 \tag{2.3.18}$$

bərabərliyi ödənilir. $g(x) \cdot (R_{j,\Omega} f)(x)$ funksiyası üçün (2.3.1) şərti teorem 2.2.1-ə əsasən ödənilir. Onda (2.3.16), (2.3.17) və (2.3.18) bərabərliklərindən (2.3.15) bərabərliyinin ödənildiyini alarıq.

(2.3.10) və (2.3.15) bərabərliklərindən isə (2.3.3) bərabərliyi alınır. Teorem isbat olundu.

Nəticə 2.3.1. Fərz edək ki, Ω – sərhədi Lyapunov səthi olan məhdud oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$. Onda $(R_{j,\Omega} f)(x)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int_{\Omega}\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)dx = -\int_{\Omega} f(x)\left(R_{j,\Omega} 1\right)(x)dx \qquad (2.3.19)$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Doğrudan da, Ω – sərhədi Lyapunov səthi olan məhdud oblast olduğundan $g(x)\equiv 1$ götürsək, $\left(R_{j,\Omega} g\right)(x)$ funksiyası da məhdud olar (bax: [5]), onda teorem 2.3.1-ə əsasən alarıq ki, $\left(R_{j,\Omega} f\right)(x)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və (2.3.19) bərabərliyi ödənilir. Nəticə isbat olundu.

III FƏSİL

KOMPLEKS RİSS ÇEVİRMƏSİ VƏ ONUN BƏZİ XASSƏLƏRİ

Fərz edək ki, kompleks müstəvidə $p \geq 1$ dərəcədən inteqrallanan, yəni $f \in L_p(C)$, $1 \leq p < \infty$ funksiyası verilmişdir. İxtiyari $k \in Z$, $k \neq 0$ üçün

$$\left(R^{(k)} f\right)(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in C : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} f(w) dm(w), \quad z \in C$$

sinqulyar inteqralına f funksiyasının k tərtibli kompleks Riss çevirməsi deyilir (bax: [75]). Kompleks Riss çevirməsi vuruğu

$$\mathrm{m}_k(\tau) = \left(\frac{\bar{\tau}}{|\tau|}\right)^k, \quad \tau \neq 0$$

olan multiplikatordur. $k = 0$ halında $R^{(0)}$ olaraq eynilik operatoru götürülür: $R^{(0)} = I$. $k = 2$ halında isə kompleks Riss çevirməsi Alfors-Beurlinq çevirməsi ilə üst-üstə düşür. Buna görə də kompleks Riss çevirməsinə Alfors-Beurlinq çevirməsinin ümumiləşməsi kimi baxa bilərik. Kompleks Riss çevirməsi kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində mühüm əhəmiyyət daşıyan operatorlardan biridir. Kompleks Riss çevirməsindən kvazikonform inikaslar nəzəriyyəsində, eləcə də elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həlli zamanı geniş istifadə olunur (bax: [75]).

Sinqulyar inteqral operatorlar nəzəriyyəsindən məlumdur ki (bax: [111]), $1 < p < \infty$ olduqda kompleks Riss çevirməsi $L_p(C)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni bu halda $f \in L_p(C)$ münasibətindən $R^{(k)}(f) \in L_p(C)$ münasibətinin ödənilməsi alınır və yalnız $p > 1$ ədədindən asılı olan elə $C_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(C)$ üçün

$$\left\| R^{(k)} f \right\|_{L_p(C)} \le C_p \left\| f \right\|_{L_p(C)} \tag{3.0.1}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$p=1$ halında, yəni $f \in L_1(C)$ olduqda isə yalnız

$$m\left\{ z \in C : \left| \left(R^{(k)} f \right)(z) \right| > \lambda \right\} \le \frac{C_1}{\lambda} \left\| f \right\|_{L_1}, \quad \lambda > 0 \tag{3.0.2}$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir, burada C_1 f funksiyasından asılı olmayan sabitdir.

Biz bu fəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirmələrinin paylanma funksiyalarının $\lambda \to +\infty$ və $\lambda \to 0+$ olduqda asimptotikalarını verəcəyik, Lebeq inteqralının ümumiləşməsi olan A-inteqral anlayışından istifadə edərək modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqunu isbat edəcəyik.

3.1. Kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları

Biz bu yarımfəsildə kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının $\lambda \to 0+$ və $\lambda \to +\infty$ şərti daxilində asimptotikalarını tədqiq edəcəyik.

Teorem 3.1.1. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\left\{ z \in C : \left| \left(R^{(k)} f \right)(z) \right| > \lambda \right\} = 0 \tag{3.1.1}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. $f \in L_1(C)$ olduğundan Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzlik xassəsinə əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $n \in N$ və $r > 0$ ədədləri tapa bilərik ki,

$$\left\| f - [f]_r^n \right\|_{L_1(C)} \le \frac{\varepsilon}{4C_1} \tag{3.1.2}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada $[f]_r^n(z) = [f]^n \chi_{(U(0;r))}(z)$.

(3.0.2) və (3.1.2) bərabərsizliklərindən alarıq ki, ixtiyari $\lambda > 0$ ədədi üçün

$$m\left\{z \in C : \left|R^{(k)}\left(f - [f]_r^n\right)(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{2C_1}{\lambda}\left\|f - [f]_r^n\right\|_{L_1(C)} \le \frac{\varepsilon}{2\lambda} \qquad (3.1.3)$$

ödənilir. $[f]_r^n(z)$ funksiyası kompleks müstəvidə məhdud funksiya olduğundan $f \in L_1(C)$ münasibətindən alınır ki, ixtiyari $p \ge 1$ üçün $[f]_r^n \in L_p(C)$ münasibəti ödənilir. Onda kompleks Riss çevirməsinin yuxarıda qeyd etdiyimiz xassəsinə əsasən ixtiyari $p > 1$ üçün $R^{(k)}[f]_r^n \in L_p(C)$ olar.

$$F_1(z) = R^{(k)}[f]_r^n(z) \cdot \chi_{(U(0;2r))}(z), \quad F_2(z) = R^{(k)}[f]_r^n(z) \cdot \chi_{(C \setminus U(0;2r))}(z)$$

işarə edək. $[f]_r^n$ funksiyasının kompleks Riss çevirməsini

$$R^{(k)}[f]_r^n(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

şəklində göstərə bilərik. $F_1(z)$ funksiyası $\overline{U(0;2r)}$ qapalı dairəsində, $F_2(z)$ funksiyası isə $C \setminus U(0;2r)$ çoxluğunda cəmlənib. İxtiyari $p > 1$ üçün $R^{(k)}[f]_r^n \in L_p(C)$ münasibətindən $F_1(z) \in L_p(C)$ münasibətinin də ödənildiyi alınır. $F_1(z)$ funksiyası məhdud çoxluqda cəmləndiyi üçün $F_1(z) \in L_p(C)$, $p > 1$ münasibətindən alarıq ki, $F_1(z) \in L_1(C)$. Buna görə də $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$\frac{\lambda}{4} m\{z \in C : |F_1(z)| > \lambda/4\} \le \int_{\{z \in C:\, |F_1(z)| > \lambda/4\}} |F_1(z)| dm(z) < \frac{\varepsilon}{8} \qquad (3.1.4)$$

bərabərsizliyi ödəniləcək. Digər tərəfdən, ixtiyari $z \in C \setminus U(0;2r)$ nöqtəsi üçün

$$\left|R^{(k)}\left([f]_r^n\right)(z)\right| \le \frac{|k|}{2\pi} \int_{U(0;r)} \frac{\left|[f]_r^n(w)\right|}{|z-w|^2} dm(w) \le$$

$$\le \frac{|k|}{2\pi r^2} \int_{U(0;r)} \left|[f]_r^n(w)\right| dm(w) = \frac{|k|}{2\pi r^2} \left\|[f]_r^n\right\|_{L_1(C)} \le \frac{|k|}{2\pi r^2} \|f\|_{L_1(C)}$$

bərabərsizliyindən alarıq ki, $F_2(z)$ funksiyası məhduddur. Buradan və (3.1.4) qiymətləndirməsindən alınır ki, $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$m\left\{z \in C : \left|R^{(k)}[f]_r^n(z)\right| > \lambda/2\right\} \le m\left\{z \in C : \left|F_1(z)\right| > \lambda/4\right\} < \frac{\varepsilon}{2\lambda} \qquad (3.1.5)$$

olur. İxtiyari $\lambda > 0$ ədədi üçün

$$\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \subset \left\{z \in C : \left|R^{(k)}[f]_r^n(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{z \in C : \left|R^{(k)}\left(f - [f]_r^n\right)(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

münasibəti ödənildiyindən (3.1.3) və (3.1.5) qiymətləndirmələrindən alarıq ki, $\lambda > 0$ ədədinin kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \le$$

$$\le m\left\{z \in C : \left|R^{(k)}[f]_r^n(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} + m\left\{z \in C : \left|R^{(k)}\left(f - [f]_r^n\right)(z)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2\lambda} + \frac{\varepsilon}{2\lambda} = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Bu isə (3.1.1) asimptotik bərabərliyinin ödənildiyini göstərir. Teorem isbat olundu.

Teorem 3.1.2. Fərz edək ki, $f \in L_1(C)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} = \frac{|k|}{2} \cdot \left|\int_C f(z) dm(z)\right| \qquad (3.1.6)$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Teoremin isbatına keçməzdən əvvəl aşağıdakı köməkçi lemmanı isbat edək.

Lemma 3.1.1. Əgər $f \in L_1(C)$ və $\int\limits_C f(z)dm(z) = 0$ olarsa, onda

$$m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} = o(1/\lambda), \quad \lambda \to 0+ \tag{3.1.7}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

Lemma 3.1.1-in isbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, f funksiyası müəyyən $U(0;r) \subset C$ dairəsində cəmlənib. Bu halda ixtiyari $z \neq 0$ nöqtəsi üçün

$$\left(R^{(k)} f\right)(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in C : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} f(w)dm(w) =$$

$$= \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in U(0;r) : |z-w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} f(w)dm(w) - \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \int\limits_{U(0;r)} \frac{(\bar{z})^k}{|z|^{k+2}} f(w)dm(w)$$

bərabərliyindən alarıq ki, $k > 0$ halında

$$\left(R^{(k)} f\right)(z) =$$

$$= \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in U(0;r) : |z-w| > \varepsilon\}} \left[\frac{(\bar{z} - \bar{w})^k - \bar{z}^k}{|z-w|^{k+2}} + \bar{z}^k \cdot \frac{|z|^{k+2} - |z-w|^{k+2}}{|z|^{k+2} \cdot |z-w|^{k+2}} \right] f(w)dm(w) =$$

$$= \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in U(0;r) : |z-w| > \varepsilon\}} \left[\frac{-\bar{w} \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} \bar{z}^i (\bar{z} - \bar{w})^{k-1-i}}{|z-w|^{k+2}} + \bar{z}^k \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \frac{|z| - |z-w|}{|z|^{k+2-i} \cdot |z-w|^{i+1}} \right] f(w)dm(w),$$

$k < 0$ halında

$$\left(R^{(k)} f\right)(z) =$$

$$= \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in U(0;r) : |z-w| > \varepsilon\}} \left[\frac{(z - w)^{|k|} - z^{|k|}}{|z-w|^{|k|+2}} + z^{|k|} \cdot \frac{|z|^{|k|+2} - |z-w|^{|k|+2}}{|z|^{|k|+2} \cdot |z-w|^{|k|+2}} \right] f(w)dm(w) =$$

$$= \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{w \in U(0;r) : |z-w| > \varepsilon\}} \left[\frac{-\bar{w} \cdot \sum\limits_{i=0}^{|k|-1} z^i (z - w)^{|k|-1-i}}{|z-w|^{|k|+2}} + \bar{z}^{|k|} \cdot \sum_{i=0}^{|k|+1} \frac{|z| - |z-w|}{|z|^{|k|+2-i} \cdot |z-w|^{i+1}} \right] f(w)dm(w)$$

bərabərliyi ödənilir. Bu bərabərliklərdən isə $|z| > 2r$ olduqda

$$\left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| \le \frac{r|k|\left[2^{2|k|} \cdot |k| + 2^{|k|+2}\left(|k|+2\right)\right]}{\pi |z|^3} \int\limits_{U(0;r)} |f(w)| dm(w) = \frac{d_0}{|z|^3} \qquad (3.1.8)$$

qiymətləndirilməsini alarıq, burada

$$d_0 = \frac{r}{\pi}|k|\left[2^{2|k|} \cdot |k| + 2^{|k|+2}\left(|k|+2\right)\right]\| f \|_{L_1(C)}.$$

(3.1.8) qiymətləndirməsindən isə

$$m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \le m\{z \in C : |z| \le 2r\} + m\left\{z \in C : \frac{d_0}{|z|^3} > \lambda\right\} =$$

$$= m\{z \in C : |z| \le 2r\} + m\left\{z \in C : |z| < \sqrt[3]{\frac{d_0}{\lambda}}\right\} = 4\pi r^2 + \pi\left(\frac{d_0}{\lambda}\right)^{2/3}$$

bərabərsizliyi alınır ki, bu da baxılan halda (3.1.7) asimptotik bərabərliyinin ödənildiyini göstərir.

İndi isə lemmanı ümumi şəkildə isbat edək. $\int\limits_C f(z) dm(z) = 0$ şərtindən alarıq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə f_1 və f_2 funksiyaları tapa bilərik ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

i) $f = f_1 + f_2$;

ii) f_1 funksiyası müəyyən $U(0;r) \subset C$ dairəsində cəmlənib və $\int\limits_C f_1(z) dm(z) = 0$;

iii) f_2 funksiyası $\| f_2 \|_{L_1} < \dfrac{\varepsilon}{4C_1}$ münasibətini ödəyir, burada C_1 (3.0.2) bərabərsizliyindəki sabitdir.

ii) şərtinə əsasən f_1 funksiyası $U(0;r) \subset C$ dairəsində cəmlənib $\int\limits_C f_1(z) dm(z) = 0$ şərtini ödədiyindən lemmanın isbat etdiyimiz hissəsinə əsasən f_1

funksiyası üçün (3.1.7) asimptotik bərabərliyi ödənilir. Buna görə də elə $\lambda(\varepsilon)>0$ ədədi var ki, ixtiyari $0<\lambda<\lambda(\varepsilon)$ üçün

$$\lambda m\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f_1\right)(z)\right|>\frac{\lambda}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.9}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Digər tərəfdən iii) şərtinə və (3.0.2) bərabərsizliyinə əsasən ixtiyari $\lambda>0$ üçün

$$\lambda m\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f_2\right)(z)\right|>\frac{\lambda}{2}\right\}\le 2C_1\|f_2\|_{L_1(C)}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.10}$$

bərabərsizliyi də ödənilir. Onda (3.1.9) və (3.1.10) bərabərsizlikləri və

$$\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f\right)(z)\right|>\lambda\right\}\subset\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f_1\right)(z)\right|>\frac{\lambda}{2}\right\}\cup\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f_2\right)(z)\right|>\frac{\lambda}{2}\right\}$$

münasibətindən alarıq ki, ixtiyari $0<\lambda<\lambda(\varepsilon)$ üçün

$$\lambda m\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f\right)(z)\right|>\lambda\right\}\le$$

$$\le\lambda m\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f_1\right)(z)\right|>\frac{\lambda}{2}\right\}+\lambda m\left\{z\in C:\left|\left(R^{(k)}f_2\right)(z)\right|>\frac{\lambda}{2}\right\}<\varepsilon$$

olur. Bu isə onu göstərir ki, (3.1.7) asimptotik bərabərliyi ixtiyari $f\in L_1(C)$ funksiyası üçün ödənilir. Lemma isbat olundu.

Teorem 1.1.2-nin isbatı. $\int_C f(z)dm(z)=0$ halında teoremin hökmü lemma 3.1.1-dən birbaşa alınır.

$$\int_C f(z)dm(z)=\eta\ne 0$$

halına baxaq.

$$f_1(z)=\frac{\eta}{\pi}\chi_{(U(0;1))}(z),\qquad f_2(z)=f(z)-f_1(z)$$

işarə edək, burada $\chi(U(0;1))$ ilə $U(0;1)$ vahid dairəsinin xarakteristik funksiyası işarə olunub. Onda

$$\int_C f_2(z)dm(z) = \int_C f(z)dm(z) - \int_C f_1(z)dm(z) = \eta - \frac{\eta}{\pi}\int_{U(0;1)} dm(z) = 0$$

olduğundan lemma 3.1.1-ə əsasən

$$m\{z \in C : |(R^{(k)} f_2)(z)| > \lambda\} = o(1/\lambda), \quad \lambda \to 0+ \tag{3.1.11}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir. İxtiyari $|z| > 2$ nöqtəsi üçün

$$|(R^{(k)} f_1)(z)| = \frac{|k\eta|}{2\pi^2}\left|\int_{U(0;1)} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} dm(w)\right| \le \frac{|k\eta|}{2\pi} \cdot \frac{1}{(|z| - 1)^2},$$

$$|(R^{(k)} f_1)(z)| = \frac{|k\eta|}{2\pi^2}\left|\int_{U(0;1)} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} dm(w)\right| = \frac{|k\eta|}{2\pi^2}\left|\int_{U(0;1)} \frac{(|\bar{z}| - \bar{w})^k}{||z| - w|^{k+2}} dm(w)\right| \ge$$

$$\ge \frac{|k\eta|}{2\pi^2}\operatorname{Re}\left(\int_{U(0;1)} \frac{(|\bar{z}| - \bar{w})^k}{||z| - w|^{k+2}} dm(w)\right) \ge \frac{|k\eta|}{2\pi} \cdot \frac{(|z| - 1)^{|k|}}{(|z| + 1)^{|k|+2}}$$

bərabərsizlikləri ödənildiyindən ixtiyari $\lambda > 0$ üçün

$$m\{z \in C : |(R^k f_1)(z)| > \lambda\} \le m\{z \in C : |z| \le 2\} + m\left\{z \in C : \frac{|k\eta|}{2\pi} \cdot \frac{1}{(|z| - 1)^2} > \lambda\right\} =$$

$$= 4\pi + m\left\{z \in C : |z| < 1 + \sqrt{\frac{|k\eta|}{2\pi\lambda}}\right\} = 4\pi + \pi\left(1 + \sqrt{\frac{|k\eta|}{2\pi\lambda}}\right)^2, \tag{3.1.12}$$

$$m\{z \in C : |(R^k f_1)(z)| > \lambda\} \ge m\left\{|z| \ge 2 : \frac{|k\eta|}{2\pi} \cdot \frac{(|z| - 1)^{|k|}}{(|z| + 1)^{|k|+2}} > \lambda\right\} =$$

$$= m\left\{|z| \ge 2 : \frac{(|z| + 1)^{|k|+2}}{(|z| - 1)^{|k|}} < \frac{|k\eta|}{2\pi\lambda}\right\} \tag{3.1.13}$$

bərabərsizliklərinin ödənildiyini alarıq. Nəzərə alsaq ki, ixtiyari $x \in [0;1]$ və ixtiyari $m \in N$ ədədləri üçün

$$(1+x)^m \le 1 + m \cdot 2^m \cdot x$$

bərabərsizliyi ödənilir, onda (3.1.13) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$m\left\{z \in C : \left|\left(R^k f_1\right)(z)\right| > \lambda\right\} \ge m\left\{|z| \ge 2 : \left(1 + |k| \cdot 2^{|k|} \cdot \frac{2}{|z|-1}\right) \cdot \left(|z|+1\right)^2 < \frac{|k\eta|}{2\pi\lambda}\right\} \ge$$

$$\ge m\left\{|z| \ge 2 : \left(|z| + |k| \cdot 2^{|k|+3}\right)^2 < \frac{|k\eta|}{2\pi\lambda}\right\} \ge \pi\left(\sqrt{\frac{|k\eta|}{2\pi\lambda}} - |k| \cdot 2^{|k|+3}\right)^2 - 4\pi. \quad (4.1.14)$$

(4.1.12) və (4.1.14) qiymətləndirmələrindən $\lambda \to 0+$ şərti daxilində limitə keçməklə alarıq ki,

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f_1\right)(z)\right| > \lambda\right\} = \frac{|k\eta|}{2} \quad (4.1.15)$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir. İxtiyari $0 < \varepsilon < 1$ üçün

$$\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f_1\right)(z)\right| > (1+\varepsilon)\lambda\right\} \setminus \left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f_2\right)(z)\right| > \varepsilon\lambda\right\} \subset$$

$$\subset \left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \subset$$

$$\subset \left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f_2\right)(z)\right| > \varepsilon\lambda\right\} \cup \left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f_1\right)(z)\right| > (1-\varepsilon)\lambda\right\}$$

münasibətləri və (4.1.11), (4.1.15) asimptotik bərabərliklərinə əsasən alarıq ki,

$$\frac{|k\eta|}{2(1+\varepsilon)} \le \liminf_{\lambda \to 0+} \lambda \cdot m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \le$$

$$\le \limsup_{\lambda \to 0+} \lambda \cdot m\left\{z \in C : \left|\left(R^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \le \frac{|k\eta|}{2(1-\varepsilon)}$$

bərabərsizlikləri ödənir. Burada isə $0 < \varepsilon < 1$ ədədi ixtiyari olduğundan alarıq ki, (3.1.6) asimptotik bərabərliyi ödənilir. Teorem isbat olundu.

3.2. Modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi

Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə verilmiş oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$.

$$\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z) = R^{(k)}(\chi_\Omega f)(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w\in\Omega:|z-w|>\varepsilon\}} \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} f(w)dm(w), \quad z \in \Omega$$

funksiyasına f funksiyasının modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi deyilir. $1 < p < \infty$ olduqda kompleks Riss çevirməsi $L_p(C)$ fəzasında məhdud operator olduğundan alarıq ki, modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi də $L_p(\Omega)$ fəzasında məhdud operatordur, yəni elə $C_p > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $f \in L_p(\Omega)$ üçün

$$\left\| R_\Omega^{(k)} f \right\|_{L_p(\Omega)} \le C_p \|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{3.2.1}$$

bərabərsizliyi ödənilir. $p = 1$ halında, yəni $f \in L_1(\Omega)$ olduqda isə yalnız

$$m\left\{z \in \Omega : \left|\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \le \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_1(\Omega)}, \quad \lambda > 0 \tag{3.2.2}$$

şəklində zəif bərabərsizlik ödənilir.

Teorem 3.1.1-dən nəticə kimi alarıq ki, modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyası üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3.2.1. Fərz edək ki, $f \in L_1(\Omega)$. Onda

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m\left\{z \in \Omega : \left|\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} = 0 \tag{3.2.3}$$

asimptotik bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Doğurdan da, ixtiyari $f \in L_1(\Omega)$ funksiyası üçün modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsinin tərifinə və teorem 3.1.1-ə əsasən alarıq ki,

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\left\{z \in \Omega : \left|\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} \le \overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m\left\{z \in C : \left|\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)\right| > \lambda\right\} =$$

$$= \overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \lambda m \left\{ z \in \Omega : \left| R^{(k)} (\chi_\Omega f)(z) \right| > \lambda \right\} = 0 .$$

Buradan isə (3.2.3) asimptotik bərabərliyi alınır. Teorem isbat olundu.

3.3. A-inteqral və modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyi

Sinqulyar inteqral operatorların xassələrinə əsasən (bax, məsələn, [8]) alarıq ki, ixtiyari $\Omega \subset C$ ölçülən çoxluğu üçün $f \in L_p(\Omega)$, $p > 1$ və $g \in L_q(\Omega)$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ olarsa, onda

$$\int_\Omega g(z) \left(R_\Omega^{(k)} f \right)(z) dm(z) = \frac{|k|}{2\pi i^{|k|}} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\{w, z \in \Omega : |z - w| > \varepsilon\}} \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} f(w) g(z) dm(w) dm(z) =$$

$$= (-1)^k \int_\Omega f(z) \left(R_\Omega^{(k)} g \right)(z) dm(z) \tag{3.3.1}$$

bərabərliyi ödənilir. Bu bərabərliyə kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyi deyilir. Biz bu yarımfəsildə göstərəcəyik ki, $\Omega \subset C$ məhdud oblast olarsa, onda $f \in L_1(\Omega)$ funksiyasının kompleks Riss çevirməsi Ω oblastında A-inteqrallanandır və (3.3.1) bərabərliyinin analoqu ödənilir.

Teorem 3.3.1. Fərz edək ki, Ω kompleks müstəvidə məhdud oblastdır, $f \in L_1(\Omega)$ və $g(z)$ funksiyası Ω oblastında verilmiş elə məhdud funksiyadır ki, $\left(R_\Omega^{(k)} g \right)(z)$ funksiyası da Ω oblastında məhduddur. Onda $g(z) \cdot \left(R_\Omega^{(k)} f \right)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A) \int_\Omega g(z) \left(R_\Omega^{(k)} f \right)(z) dm(z) = (-1)^k \int_\Omega f(z) \left(R_\Omega^{(k)} g \right)(z) dm(z) \tag{3.3.2}$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. A-inteqral funksiyalara nəzərən additivlik xassəsini ödədiyi üçün fərz edə bilərik ki, f funksiyası Ω oblastında verilmiş həqiqi funksiyadır, ixtiyari $z \in \Omega$ üçün $f(z) \geq 0$ və

$$\max_{z\in\Omega}\left\{|g(z)|, \left|\left(R_{\Omega}^{(k)} g\right)(z)\right|\right\} \leq 1$$

bərabərsizlikləri ödənilir. İxtiyari $z \notin \Omega$ üçün $f(z)=0$ olduğunu qəbul edəcəyik.

Teoremin isbatını birinci fəsildə isbat etdiyimiz teorem 1.3.1-in isbatına oxşar qaydada aparacağıq və teorem 1.3.1-in isbatında təyin etdiyimiz E_n, E_n', G_p, L_n, L_n', T_n çoxluqları, $\Phi_n(z)$, $\Phi_n^*(z)$ funksiyaları və α_n, r_z ədədlərindən istifadə edəcəyik. Sadəlik üçün teoremin isbatını bir neçə addıma bölürük.

1-ci addım. Göstərək ki,

$$\int_{T_n}\left|R_{\Omega}^{(k)}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(z)\right| dm(z) < d_k \cdot \alpha_n \tag{3.3.3}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada $d_k = 4000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k|$.

$$h_n(z) = R_{\Omega}^{(k)}\left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(z)$$

işarə edək. İxtiyari $z \in T_n$ nöqtəsi üçün

$$|h_n(z)| = \frac{|k|}{2\pi}\left|\int_{\Omega}\frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}}\left[\Phi_n(w) - \Phi_n^*(w)\right]dm(w)\right| =$$

$$= \frac{|k|}{2\pi}\left|\sum_{p\in I}\int_{G_p}\frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}}\left[\Phi_n(w) - \Phi_n^*(w)\right]dm(w)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|k|}{2\pi}\sum_{p\in I}\left|\int_{G_p}\frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}}\Phi_n(w)dm(w) - \int_{G_p}\frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}}\Phi_n^*(w)dm(w)\right| \tag{3.3.4}$$

ödənilir. İnteqral üçün orta qiymət teoreminə əsasən alarıq ki, ixtiyari $p \in I$ üçün elə $w_{p,i} \in U\left(z_p; 5r_{z_p}\right)$, $i = \overline{1,4}$ nöqtələri var ki,

$$\int_{G_p} \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} \Phi_n(w)dm(w) = \left[\mathrm{Re}\frac{(\bar{z}-\overline{w_{p,1}})^k}{|z-w_{p,1}|^{k+2}} + i\,\mathrm{Im}\frac{(\bar{z}-\overline{w_{p,2}})^k}{|z-w_{p,2}|^{k+2}} \right] \cdot \int_{G_p} \Phi_n(w)dm(w),$$

$$\int_{G_p} \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} \Phi_n^*(w)dm(w) = \left[\mathrm{Re}\frac{(\bar{z}-\overline{w_{p,1}})^k}{|z-w_{p,1}|^{k+2}} + i\,\mathrm{Im}\frac{(\bar{z}-\overline{w_{p,2}})^k}{|z-w_{p,2}|^{k+2}} \right] \cdot \int_{G_p} \Phi_n^*(w)dm(w).$$

Onda (1.3.4) bərabərliyi və (3.3.4) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$|h_n(z)| \le \frac{|k|}{2\pi} \sum_{p\in I} \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{(\bar{z}-\overline{w_{p,i}})^k}{|z-w_{p,i}|^{k+2}} - \frac{(\bar{z}-\overline{w_{p,i+2}})^k}{|z-w_{p,i+2}|^{k+2}} \right| \cdot \int_{G_p} \Phi_n(w)dm(w). \tag{3.3.5}$$

İxtiyari $w, v \in U(z_p; 5r_{z_p})$ və $z \in T_n$ üçün

$$\left| \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} - \frac{(\bar{z}-\bar{v})^k}{|z-v|^{k+2}} \right| \le \frac{400 \cdot 3^{|k|} \cdot r_{z_p}}{|z-z_p|^3} \tag{3.3.6}$$

qiymətləndirilməsi ödənilir. Doğrudan da $k > 0$ halında

$$\left| \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} - \frac{(\bar{z}-\bar{v})^k}{|z-v|^{k+2}} \right| \le \left| \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-w|^{k+2}} - \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-v|^{k+2}} \right| + \left| \frac{(\bar{z}-\bar{w})^k}{|z-v|^{k+2}} - \frac{(\bar{z}-\bar{v})^k}{|z-v|^{k+2}} \right| =$$

$$= \frac{\left| |z-v|^{k+2} - |z-w|^{k+2} \right|}{|z-w|^2 \cdot |z-v|^{k+2}} + \frac{\left| (\bar{z}-\bar{w})^k - (\bar{z}-\bar{v})^k \right|}{|z-v|^{k+2}} \le$$

$$\le \frac{|v-w|}{|z-w|^2 \cdot |z-v|^{k+2}} \cdot \sum_{l=0}^{k+1} |z-v|^l \cdot |z-w|^{k+1-l} + \frac{|v-w|}{|z-v|^{k+2}} \cdot \sum_{l=0}^{k-1} |z-v|^l \cdot |z-w|^{k-1-l} =$$

$$= \frac{|v-w|}{|z-w|^2 \cdot |z-v|} \cdot \sum_{l=0}^{k+1} \left| \frac{z-w}{z-v} \right|^{k+1-l} + \frac{|v-w|}{|z-v|^3} \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \left| \frac{z-w}{z-v} \right|^{k-1-l} \le$$

$$\le \frac{80 \cdot r_{z_p}}{\left|z - z_p\right|^3} \cdot \left(\sum_{l=0}^{k+1} 3^{k+1-l} + \sum_{l=0}^{k+1} 3^{k-1-l} \right) \le \frac{400 \cdot 3^k \cdot r_{z_p}}{\left|z - z_p\right|^3},$$

$k < 0$ halında da

$$\left| \frac{(\bar{z} - \bar{w})^k}{|z - w|^{k+2}} - \frac{(\bar{z} - \bar{v})^k}{|z - v|^{k+2}} \right| = \left| \frac{(z - w)^{|k|}}{|z - w|^{|k|+2}} - \frac{(z - v)^{|k|}}{|z - v|^{|k|+2}} \right| \le \frac{400 \cdot 3^{|k|} \cdot r_{z_p}}{\left|z - z_p\right|^3}$$

olduğundan alarıq ki, (3.3.6) bərabərsizliyi k parametrinin hər bir $k \ne 0$ qiymətində ödənilir. (3.3.6) bərabərsizliyini (3.3.5) qiymətləndirməsində nəzərə alsaq

$$|h_n(z)| \le \frac{|k|}{2\pi} \sum_{p \in I} \frac{800 \cdot 3^{|k|} \cdot r_{z_p}}{\left|z - z_p\right|^3} \cdot \int_{G_p} \Phi_n(w) dm(w) \le$$

$$\le \frac{|k|}{\pi} \sum_{p \in I} \frac{400 \cdot 3^{|k|} \cdot r_{z_p}}{\left|z - z_p\right|^3} \cdot \left(\frac{1}{2} \pi \cdot 25 r_{z_p}^2 \cdot n \right) = \sum_{p \in I} \frac{10000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k| \cdot r_{z_p}^3 \cdot n}{\left|z - z_p\right|^3}.$$

olduğunu alarıq. Buradan isə

$$\int_{T_n} |h_n(z)| dm(z) \le 10000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k| \cdot n \cdot \sum_{p \in I} r_{z_p}^3 \int_{T_n} \frac{dm(z)}{\left|z - z_p\right|^3} \le$$

$$\le 10000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k| \cdot n \cdot \sum_{p \in I} r_{z_p}^3 \int_{\{z : |z - z_p| \ge 10 r_{z_p}\}} \frac{dm(z)}{\left|z - z_p\right|^3} =$$

$$= 10000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k| \cdot n \cdot \sum_{p \in I} r_{z_p}^3 \cdot 2\pi \int_{10 r_{z_p}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = 2000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k| \cdot \pi \cdot n \cdot \sum_{p \in I} r_{z_p}^2 =$$

$$= 2000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k| \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{2\alpha_n}{\pi n} = 4000 \cdot 3^{|k|} \cdot |k| \cdot \alpha_n,$$

yəni (3.3.3) bərabərsizliyinin ödənildiyini alarıq.

$f(z)$ funksiyasını

$$f(z)=[f(z)]^n+\Phi_n^*(z)+[\Phi_n-\Phi_n^*](z) \tag{3.3.7}$$

şəklində göstərək.

2-ci addım. Biz bu hissədə

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_n} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}f\right)(z)dm(z)=(-1)^k\int_\Omega f(z)\left(R_\Omega^{(k)}g\right)(z)dm(z) \tag{3.3.8}$$

bərabərliyinin ödənildiyini göstərəcəyik.

$$\int_{T_n} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}f\right)(z)dm(z)=\int_{T_n} g(z)\left\{\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)+\left(R_\Omega^{(k)}\Phi_n^*\right)(z)+R_\Omega^{(k)}\left(\Phi_n-\Phi_n^*\right)(z)\right\}dm(z)=$$

$$=\int_{T_n} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)dm(z)+\int_{T_n} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}\Phi_n^*\right)(z)dm(z)+$$

$$+\int_{T_n} g(z)R_\Omega^{(k)}\left(\Phi_n-\Phi_n^*\right)(z)dm(z)=S_1+S_2+S_3 \tag{3.3.9}$$

inteqralına baxaq. Kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar üçün (3.3.1) bərabərliyinə əsasən yaza bilərik ki,

$$S_1=\int_{T_n} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)dm(z)=\int_\Omega g(z)\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)dm(z)-\int_{L_n'} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)dm(z)=$$

$$=(-1)^k\int_\Omega [f(z)]^n\left(R_\Omega^{(k)}g\right)(z)dm(z)-\int_{L_n'} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)dm(z)=S_1^{(1)}+S_1^{(2)}.$$

Nəzərə alsaq ki,

$$\left|S_1^{(2)}\right|=\left|\int_{L_n'} g(z)\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)dm(z)\right|\le\int_{L_n'}\left|\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)(z)\right|dm(z)\le$$

$$\le\left[m(L_n')\cdot\int_\Omega\left(R_\Omega^{(k)}[f]^n\right)^2(z)dm(z)\right]^{1/2}\le C_2\left[m(L_n')\cdot\int_\Omega\left([f(z)]^n\right)^2dm(z)\right]^{1/2}\le$$

$$\leq C_2 \left[n \cdot m(L_n') \cdot \int_{\Omega} f(z) dm(z) \right]^{1/2}$$

olur, onda (1.3.5) qiymətləndirməsinə əsasən

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = (-1)^k \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} [f(z)]^n \left(R_{\Omega}^{(k)} g\right)(z) dm(z) = (-1)^k \int_{\Omega} f(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} g\right)(z) dm(z) \qquad (3.3.10)$$

olduğunu alarıq. S_2 inteqralını

$$S_2 = \int_{T_n} g(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} \Phi_n^*\right)(z) dm(z) = \int_{\Omega} g(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} \Phi_n^*\right)(z) dm(z) - \int_{L_n'} g(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} \Phi_n^*\right)(z) dm(z) =$$

$$= (-1)^k \int_{\Omega} \Phi_n^*(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} g\right)(z) dm(z) - \int_{L_n'} g(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} \Phi_n^*\right)(z) dm(z) = S_2^{(1)} + S_2^{(2)}$$

şəklində göstərə bilərik.

$$\left|S_2^{(1)}\right| = \left| \int_{\Omega} \Phi_n^*(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} g\right)(z) dm(z) \right| \leq \int_{\Omega} \left| \Phi_n^*(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} g\right)(z) \right| dm(z) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} \Phi_n^*(z) dm(z) = \int_{\Omega} \Phi_n(z) dm(z) = \alpha_n,$$

$$\left|S_2^{(2)}\right| = \left| \int_{L_n'} g(z) \left(R_{\Omega}^{(k)} \Phi_n^*\right)(z) dm(z) \right| \leq \int_{L_n'} \left| \left(R_{\Omega}^{(k)} \Phi_n^*\right)(z) \right| dm(z) \leq$$

$$\leq \left[m(L_n') \cdot \int_{\Omega} \left(R_{\Omega}^{(k)} \Phi_n^*\right)^2 (z) dm(z) \right]^{1/2} \leq C_2 \left[m(L_n') \cdot \int_{\Omega} \left(\Phi_n^*(z)\right)^2 dm(z) \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq C_2 \left[\frac{25}{2} n \cdot m(L_n') \cdot \int_{\Omega} \Phi_n^*(z) dm(z) \right]^{1/2} = C_2 \left[\frac{25}{2} n \cdot m(L_n') \cdot \alpha_n \right]^{1/2}$$

olduğu üçün (1.3.5) qiymətləndirməsindən alarıq ki,

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = 0 . \qquad (3.3.11)$$

S_3 inteqralını qiymətləndirmək üçün (3.3.3) bərabərsizliyindən istifadə edəcəyik:

$$|S_3| = \left| \int_{T_n} g(z) R_{\Omega}^{(k)} (\Phi_n - \Phi_n^*)(z) dm(z) \right| \le \int_{T_n} \left| g(z) R_{\Omega}^{(k)} (\Phi_n - \Phi_n^*)(z) \right| dm(z) \le$$

$$\le \int_{T_n} \left| R_{\Omega}^{(k)} (\Phi_n - \Phi_n^*)(z) \right| dm(z) < d_k \cdot \alpha_n .$$

Buradan isə alırıq ki,

$$\lim_{n\to\infty} S_3 = 0. \qquad (3.3.12)$$

(3.3.9), (3.3.10), (3.3.11) və (3.3.12) bərabərliklərindən isə (3.3.8) bərabərliyinin ödənildiyini alırıq.

3-cü addım. Biz bu hissədə

$$(A)\int_{\Omega} g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z) dm(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{T_n} g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z) dm(z) \qquad (3.3.13)$$

bərabərliyinin ödənildiyini göstərəcəyik.

$$\int_{T_n} g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z) dm(z) - \int_{\Omega} \left[g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z)\right]^n dm(z) = -\int_{L_n'} \left[g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z)\right]^n dm(z) +$$

$$+ \int_{T_n} \left\{ g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z) - \left[g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z)\right]^n \right\} dm(z) = S^{(1)} + S^{(2)} \qquad (3.3.14)$$

inteqrallar fərqinə baxaq.

$$\left|S^{(1)}\right| \le n \cdot m(L_n')$$

bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$\lim_{n\to\infty} S^{(1)} = 0 \qquad (3.3.15)$$

bərabərliyi ödənilir.

$$\sigma_n = \left\{ z \in \Omega : \left| g(z)\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z) \right| > n \right\}$$

işarə edək.

$$m\left\{ z \in \Omega : \left| \left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z) \right| > n \right\} = o(1/n),\ n \to \infty$$

münasibətinə əsasən

$$m(\sigma_n) = o(1/n), \; n \to \infty$$

olar. (3.3.3) bərabərsizliyi və (3.3.7) ayrılışından alarıq ki,

$$\left|S^{(2)}\right| \le \int\limits_{T_n \cap \sigma_n} \left| g(z) \left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z) \right| dm(z) \le \int\limits_{T_n \cap \sigma_n} \left| \left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z) \right| dm(z) \le$$

$$\le \int\limits_{\sigma_n} \left| \left(R_\Omega^{(k)} [f]^n\right)(z) \right| dm(z) + \int\limits_{\sigma_n} \left| \left(R_\Omega^{(k)} \Phi_n^*\right)(z) \right| dm(z) + \int\limits_{T_n} \left| R_\Omega^{(k)} \left(\Phi_n - \Phi_n^*\right)(z) \right| dm(z) \le$$

$$\le \left[m(\sigma_n) \cdot \int\limits_\Omega \left(R_\Omega^{(k)} [f]^n\right)^2 (z) dm(z) \right]^{1/2} + \left[m(\sigma_n) \cdot \int\limits_\Omega \left(R_\Omega^{(k)} \Phi_n^*\right)^2 (z) dm(z) \right]^{1/2} + d_k \cdot \alpha_n \le$$

$$\le C_2 \left[m(\sigma_n) \cdot \int\limits_\Omega \left([f(z)]^n \right)^2 dm(z) \right]^{1/2} + C_2 \left[m(\sigma_n) \cdot \int\limits_\Omega \left(\Phi_n^*(z) \right)^2 dm(z) \right]^{1/2} + d_k \cdot \alpha_n \le$$

$$\le C_2 \left[n \cdot m(\sigma_n) \cdot \int\limits_\Omega f(z) dm(z) \right]^{1/2} + C_2 \left[\frac{25}{2} n \cdot m(\sigma_n) \cdot \int\limits_\Omega \Phi_n^*(z) dm(z) \right]^{1/2} + d_k \cdot \alpha_n .$$

Bu isə onu göstərir ki,

$$\lim_{n \to \infty} S^{(2)} = 0 \qquad (3.3.16)$$

bərabərliyi ödənilir. $g(z) \cdot \left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)$ funksiyası üçün (1.3.1) şərti teorem 3.2.1-ə əsasən ödənilir. Onda (3.3.14), (3.3.15) və (3.3.16) bərabərliklərindən (3.3.13) bərabərliyinin ödənildiyini alarıq.

(3.3.8) və (3.3.13) bərabərliklərindən isə (3.3.2) bərabərliyi alınır. Teorem isbat olundu.

Nəticə 3.3.1. Fərz edək ki, Ω – sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblastdır və $f \in L_1(\Omega)$. Onda $\left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və

$$(A)\int\limits_\Omega \left(R_\Omega^{(k)} f\right)(z) dm(z) = (-1)^k \int\limits_\Omega f(z) \left(R_\Omega^{(k)} 1\right)(z) dm(z) \qquad (3.3.17)$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Doğrudan da, Ω – sərhədi Lyapunov əyrisi olan məhdud oblast olduğundan $g(z) \equiv 1$ götürsək, $\left(R_{\Omega}^{(k)} g\right)(z)$ funksiyası da məhdud olar (bax: [5]), onda teorem 3.3.1-ə əsasən alarıq ki, $\left(R_{\Omega}^{(k)} f\right)(z)$ funksiyası Ω oblastında A-inteqrallanandır və (3.3.17) bərabərliyi ödənilir. Nəticə isbat olundu.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi harmonik analizin əsas inteqral çevirmələrindən olan Alfors-Beurlinq və Riss çevirmələrinin xassələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas elmi nəticələr alınmışdır:

- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin Alfors-Beurlinq çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;

- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların, habelə sinqulyar hissəsi atomar diskret ölçü olan sonlu kompleks ölçülərin modifikasiya olunmuş Alfors-Beurlinq çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;

- R^d fəzasında Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;

- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur;

- kompleks müstəvidə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların kompleks Riss çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotikaları verilmişdir;

- ümumiləşmiş inteqral anlayışlarından istifadə edilərək məhdud oblastda Lebeq mənada inteqrallanan funksiyaların modifikasiya olunmuş kompleks Riss çevirməsi üçün Riss bərabərliyinin analoqu isbat olunmuşdur.

İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT SİYAHISI

[1] Абдуллаев, С.К., Бабаев, А.А. Некоторые оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью // Доклады АН СССР, –1969. т.188, №2, – с. 263–265.

[2] Абдуллаев, С.К. Многомерный сингулярный оператор в пространствах Гёлдера с весом // – Баку: Всесоюзная школа по теории функций, 1982, с. 43-48.

[3] Абдуллаев, С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций // Доклады АН СССР, –1985. т.283, №4, – с. 777-780.

[4] Александров, А.Б. Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций // Математические заметки, – 1981. т.30, №1, – с. 59-72.

[5] Алиев, И.А., Гаджиев, А.Д. Весовые оценки многомерных сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига // Математический сборник –1992. т.183, №9, – с. 45-66.

[6] Алиев, Р.А. О представимости аналитических функций по своим граничным значениям // Математические заметки, – 2003. т.73, №1, – с. 8-21.

[7] Алиев, Р.А. $N^{\pm}$-интегралы и граничные значения интегралов типа Коши конечных мер // Математический сборник, – 2014. т.205, №7, – с. 3-24.

[8] Антер Али Аль Саияд, Применение $A^{\wedge}$-интегрирование к преобразование Фурье преобразований Фурье // Фундаментальная и прикладная математика, – 1997. т.3, №2, – с. 351-357.

[9] Антер Али Аль Саияд, $A^{\wedge}$-интегрируемость преобразований Фурье // Фундаментальная и прикладная математика, – 2002. т.8, №1, – с. 307-312.

[10] Антер Али Аль Саияд, Преобразование Гильберта и A-интеграл Фурье // Фундаментальная и прикладная математика, – 2002. т.8, №4, – с. 1239-1243.

[11] Бабаев, А.А. Некоторые оценки для особого интеграла // Доклады АН СССР, – 1966. т.170, №5, – с. 1003–1005.

[12] Бонди, И.Л. О почти всюду A-интегрируемых функций // Доклады АН СССР, – 1962. т.145, №3, – с. 491-494.

[13] Бонди, И.Л. Замена переменной в A-интеграле // Ученые записки Московского государственного педагогического института, – 1962. №188, – с. 3-21.

[14] Бонди, И.Л. Об одном свойстве A-интегрируемых функций // Успехи Математических Наук, – 1963. т. 18(109), №1, – с. 145-150.

[15] Бонди, И.Л. A-интегрируемость в узком смысле // Математический сборник, – 1963. т. 61(103), №2, – с. 121-146.

[16] Бонди, И.Л. A-интеграл и обобщенные функции // Успехи Математических Наук, – 1964. т. 19(116), №2, – с. 131-138.

[17] Бонди, И.Л. Представление обобщенных функций над пространством K с помощью A-интеграла // Известия вузов. Математика, – 1971. №8, – с. 16-26.

[18] Вахер, Ф.С. Общий вид линейного функционала на банаховом пространстве аналитических функций и A-интеграл // Доклады АН СССР, – 1966. т. 166, №3, – с. 518-521.

[19] Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа, – Москва: Наука, – 1988. – 512 с.

[20] Виноградова, И.А. О неопределенном A-интеграле // Доклады АН СССР, – 1960. т. 135, №1, – с. 9-11.

[21] Виноградова, И.А. О неопределенном A-интеграле // Известия АН СССР, Серия мат., – 1961. т. 25, №1, – с. 113-142.

[22] Виноградова, И.А. О представление измеримой функции неопределенным A-интегралом // Известия АН СССР, Серия мат., – 1962. т. 26, №4, – с. 581-604.

[23] Виноградова, И.А. Об A-интегрировании функции, сопряженной к суммируемой // Известия АН СССР, Серия мат., – 1963. т. 27, №2, – с. 305-328.

[24] Виноградова, И.А. О неопределенном A-интеграле, II // Известия АН СССР, Серия мат., – 1963. т. 27, №4, – с. 761-776.

[25] Виноградова, И.А. О некотором сужении A-интеграла // Математический сборник, – 1967. т. 72, №3, – с. 365-387.

[26] Виноградова, И.А. Обобщенный интеграл и сопряженные функции // Математический сборник, – 1976. т. 99(141), №1, – с. 84-121.

[27] Виноградова, И.А. Об LG^*-интеграле типа Коши // Математические заметки, – 1976. т. 20, №5, – с. 645-653.

[28] Ефимова, М.П. О свойствах Q-интеграла // Математические заметки, – 2011. т. 90, №3, – с. 340-350.

[29] Ефимова, М.П. Достаточное условие замены переменной в обобщенном Q-интеграле // Известия Саратовского Университетата. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, – 2013. т. 13, №1, – с. 43-46.

[30] Ефимова, М.П. Достаточное условие аддитивности обобщенного Q-интеграла и точки интегрируемости // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика, – 2015. №4, – с. 46-49.

[31] Лукашенко, Т.П. Сопряженные функции и интегралы // Известия АН СССР. Серия мат., – 1972. т. 36. №2, – с. 435-449.

[32] Лукашенко, Т.П. Об интегралах сопряженных функций // Известия АН СССР. Серия мат., – 1979. т. 43. №4, – с. 795-830.

[33] Лукашенко, Т.П. Об A-интегрируемости функций // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика, – 1982. №6, – с. 59-63.

[34] Лукашенко, Т.П. A-интеграл и его применение в исследованиях П.Л.Ульянова и других математиков // Известия вузов. Математика, – 2008. №5, – с. 77-82.

[35] Очан, Ю.С. Обобщенный интеграл // Математический сборник, – 1951. т. 28(70). №2, – с. 293-336.

[36] Рзаев, Р.М. Об ограниченности многомерного сингулярного интегрального оператора в пространствах $BMO^k_{\phi,\theta}$ и $H^k_{\phi,\theta}$ // Труды Азербайджанского Математического Общества, – 1996. т.2, – с. 164-175.

[37] Рыбаков, В.И. A-интегралы от векторнозначных функций // Ученые Записки Свердловского государственного педагогического института, – 1970. т.102, – с. 35-41.

[38] Рыбкин, А.В. Функция спектрального сдвига, характеристическая функция сжатия и обобщенный интеграл // Математический сборник, – 1994. т. 185. №10, – с. 91-144.

[39] Салимов, Т.С. A-интеграл и граничные значения аналитических функций // Математический сборник, – 1988. т. 136(178). №1(5), – с. 24-40.

[40] Салимов, Т.С. К теореме Е.Титчмарша о сопряженной функции // Proceedings of A.Razmadze Math. Institute, – 1993. т.102. – с. 99-104.

[41] Скворцов, В.А. A-интегрируемые мартингальные последовательности и ряды Уолша // Известия РАН. Серия мат., – 2001. т. 65. №3, – с. 193-200.

[42] Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых простарнствах / И.Стейн, Г.Вейс, – Москва: Мир, – 1974. – 332 с.

[43] Ульянов, П.Л. О тригонометрических рядах с монотонно убывающими коэффициентами // Доклады АН СССР, – 1953. т. 90. №1, – с. 33-36.

[44] Ульянов, П.Л. Применение A-интегрирование к одному классу тригонометрических рядов // Математический сборник, – 1954. т. 35(77). №3, – с. 469-490.

[45] Ульянов, П.Л. A-интеграл и его применение к теории тригонометрических рядов // Успехи Математических Наук, – 1955. т. 10. №1 (63), – с. 189-191.

[46] Ульянов, П.Л. Некоторые вопросы A-интегрирование // Доклады АН СССР, – 1955. т. 102. №6, – с. 1077-1080.

[47] Ульянов, П.Л. Об A-интеграле Коши // Успехи Математических Наук, – 1956. т. 11. №5 (71), – с. 223-229.

[48] Ульянов, П.Л. A- интеграл и сопряженные функции // Ученые Записки Московского Университета, – 1956. т. 181. – с. 139-157.

[49] Ульянов, П.Л. Об интегралах типа Коши // Труды МИАН СССР, – 1961. т. 60. – с. 262-281.

[50] Хускивадзе, Г.А. Об A-интегралах типа Коши // Сообщения АН Груз. ССР, – 1961. т. 27. №6, – с. 663-670.

[51] Adams, D.R. Function Spaces and Potential Theory / D.R. Adams, L.I. Hedberg, – Berlin: Springer, – 1996. – 379 p.

[52] Adams, D.R., Xiao, J. Nonlinear analysis on Morrey spaces and their capacities // Indiana University Mathematics Journal, – 2004. vol. 53:6, – p. 1631-1666.
[53] Adams, D.R., Xiao, J. Morrey spaces in harmonic analysis // Arkiv för matematik, – 2012. vol. 50, – p. 201-230.
[54] Ahlfors, L.V. Lectures on Quasiconformal Mappings. 2nd ed. / L.V. Ahlfors, – USA: University Lecture Series, v. 38. AMS, – 2006. – 162 p.
[55] Akbulut, A., Guliyev, V., Mustafayev, R. On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces // Mathematica Bohemica, – 2012. vol. 137:1, – p. 27-43.
[56] Aliev, R.A., Salimov, T.S. The A-integral and Cauchy-Green's formula // - Baku: Transaction of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, – 2004. vol. 24:7, – p. 17-28.
[57] Aliev, R.A. On representability of Cauchy type integrals by their boundary values // - Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2007. vol. 26, – p. 45-53.
[58] Aliev, R.A. On boundary properties of analytical functions // - Baku: Transaction of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, – 2009. vol. 29:4, – p. 3-10.
[59] Aliev, R.A. On additivity of Q-integral and convergence of Fourier series (Q) // - Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2010. vol. 32, – p. 47-55.
[60] Aliev, R.A. On some properties of Cauchy singular integral of finite complex measures // - Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2011. vol. 34, – p. 27-32.
[61] Aliev, R.A. Existence of angular boundary values and Cauchy-Green formula // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, – 2011. vol. 7:1, – p. 3-18.
[62] Aliev, R.A. On representability of functions analytic on a half plane with respect to own boundary conditions // - Baku: Transaction of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, – 2014. vol. 34:4, – p. 15-22.

[63] Aliev, R.A. On the properties of Q - and Q'-integrals of the function measurable on the real axis // - Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2015. vol. 41:1, – p. 56-62.

[64] Aliev, R.A. On Taylor coefficients of Cauchy type integrals of finite complex measures // Complex Variables and Elliptic Equations, – 2015. vol. 60:12, – p. 1727-1738.

[65] Aliev, R.A. On Laurent coefficients of Cauchy type integrals of finite complex measures // - Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2016. vol. 42:2, – p. 292-303.

[66] Aliev, R.A. On properties of Hilbert transform of finite complex measures // Complex Analysis and Operator Theory, – 2016. vol. 10:1, – p. 171-185.

[67] Aliev, R.A. Riesz's equality for the Hilbert transform of the finite complex measures // - Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2016. vol. 6:1, – p. 126-135.

[68] Aliev, R.A. Representability of Cauchy-type integrals of finite complex measures on the real axis in terms of their boundary values // Complex Variables and Elliptic Equations, – 2017. vol. 62:4, – p. 536-553.

[69] Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and restricted Ahlfors–Beurling transform // Integral Transforms and Special Functions, – 2018. vol. 29:10, – p. 820-830.

[70] Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and Ahlfors-Beurling transform // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference, Khazar University, Baku, Azerbaijan, 21-24 May, – 2018, – p. 109-110.

[71] Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and restricted complex Riesz transform // - Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2020. vol. 10:1, – p. 209-221.

[72] Aliev, R.A. Nebiyeva, Kh.I. The A-integral and restricted Riesz transform // Constructive Mathematical Analysis, – 2020. vol. 3:3, – p. 104-112.

[73] Aliev, R.A., Nebiyeva, Kh.I. On properties of the complex Riesz transform // Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations, Bannoe Lake, Ufa, Russia, 15-19 March, – 2021, – p.12.
[74] Almeida, A., Hasanov J., Samko, S. Maximal and Potential Operators in Variable Exponent Morrey Spaces // Georgian mathematical journal, – 2008. vol. 15:2, – p. 1-15.
[75] Astala, K. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane / K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, – USA: Princeton, University Press, – 2009. – 696 p.
[76] Banuelos, R., Janakiraman, P. Sobolev regularity of the Beurling transform on planar domains // Transaction of the American Mathematical Sosiety, – 2008. vol. 360:7, – p. 3603-3612.
[77] Besicovitch, A.S. On a general metric property of summable functions // Journal of the London Mathematical Society, – 1926. vol. 1:2, – p. 120-128.
[78] Calderon, A.P., Zygmund, A. On the existence of certain singular integrals // Acta Mathematica, – 1952. vol. 88:1, – p. 85-139.
[79] Chiarenza, F., Frasca, M. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, – 1987. vol. 7:(3-4), – p. 273-279.
[80] Cianchi, A. Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces // Journal of the London Mathematical Society, – 1999. vol. 60:1, – p. 187-202.
[81] Coifman, R., Fefferman, C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Mathematica, – 1974. vol. 51, – p. 241-250.
[82] Coifman, R., de Guzmán, M. Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces // Revista de la Unión Matemática Argentina, – 1970. vol. 25, – p. 137-143.
[83] Cruz, V., Tolsa, X. Smoothness of the Beurling transform in Lipschitz domains // Journal of Functional Analysis, – 2012. vol. 262, – p. 4423–4457.

[84] Cruz, V., Mateu, J., Orobitg, J. Beltrami equation with coefficient in Sobolev and Besov spaces // Canadian Journal of Mathematics, – 2013. vol. 65, – p. 1217-1235.
[85] Deringoz, F., Guliyev, V.S., Samko, S. Boundedness of Maximal and Singular Operators on Generalized Orlicz-Morrey Spaces // Operator Theory: Advances and Applications, – 2013, vol. 1, – p. 1-21.
[86] Doubtsov, E., Vasin, A.V. Restricted Beurling transforms on Campanato spaces // Complex Variables and Elliptic Equations, – 2017. vol. 62:3, – p. 333-346.
[87] Dragicevic, O. Weighted estimates for powers of the Ahlfors-Beurling operators // Proceedings of the American Mathematical Sosiety, – 2011. vol. 139, – p.2113–2120.
[88] Evans, L.C. Measure theory and fine properties of functions / L.C.Evans, R.F.Gariepy,– USA: Boca Raton, CRC Press, – 1992. – 314 p.
[89] Fefferman, C. Inequalities for strongly singular convolution operators // Acta Mathematica, – 1970. vol. 124:1, – p. 9–36.
[90] Guliyev, V.S., Hasanov, J.J., Samko, S.G. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable ezponent Morrey spaces // Mathematica Scandinavica, – 2010. vol. 107, – p. 285–304.
[91] Grafakos, L. Classical Fourier Analysis, Third Edition / L.Grafakos, – Basel: Springer, – 2014. – 647 p.
[92] Hunt, R., Muckenhoupt, B., Wheeden, R. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform // Transaction of the American Mathematical Sosiety, – 1973. vol. 176:2, – p. 227–251.
[93] Iwaniec, T. The best constant in a BMO-inequality for the Beurling-Ahlfors transform // Michigan Mathematical Journal, – 1987. vol. 34, – p. 407-434.
[94] Kokilashvili, V. Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Operator Theory: Advances and Applications, book series, vol. 249 / V.Kokilashvili, A.Meskhi, H.Rafeiro, S.Samko, – Basel: Birkhäuser, –2016. – 587 p.

[95] Kokilashvili, V., Samko, S. Singular Integrals in Weighted Lebesgue Spaces with Variable Exponent // Georgian Mathematical Journal, – 2003. vol. 10:1, – p. 145–156.
[96] Kokilashvili, V. Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand lebesgue spaces // Journal of Mathematical Sciences, – 2010. vol. 170:1, – p. 20-33.
[97] Kolmogoroff, A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fundamenta Mathematicae, – 1925. vol. 7:1, – p. 24-29.
[98] Kwok-Pun, H. The Ahlfors–Beurling transform on Morrey spaces with variable exponents // Integral Transforms and Special Functions, – 2018. vol. 29:3, – p. 207-220.
[99] Lukashenko, T.P. On the A-integral representation of the Hilbert transform and conjugate function // Analysis Mathematica, – 1982. vol. 8:4, – p. 263-275.
[100] Mateu, J., Orobitg, J., Verdera, J. Extra cancellation of even Calderon-Zygmund operators and quasiconformal mappings // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, – 2009. vol. 91:4, – p. 402-431.
[101] Nakai, E. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces // Mathematische Nachrichten, – 1994. vol. 166, – p. 95-103.
[102] Nakai, E. The Campanato, Morrey and Hölder spaces on spaces of homogeneous type // Studia Mathematica, – 2006. vol. 176:1, – p. 1-19.
[103] Nebiyeva, Kh.I. Asymptotic behavior of the distribution function of the Ahlfors-Beurling transform // - Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2019. vol. 7:2, – p. 3-9.
[104] Nebiyeva, Kh.I. Asymptotic behavior of the distribution function of the Riesz transform // - Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2020. vol. 8:2, – p. 3-9.
[105] Nebiyeva, Kh.I. On properties of Ahlfors-Beurling transform of finite complex measures // - Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2021. vol. 9:1, – p. 40-48.

[106] Omaroghlu (Nebiyeva), Kh.I. The A-integral and Riesz transform // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference, Khazar University, Baku, Azerbaijan, 10-14 June, – 2019, – p. 93-94.
[107] Peetre, J. On the Theory of $L_{p,\lambda}$ Spaces // Journal of Functional Analysis, – 1969. vol. 4, – p. 71-87.
[108] Prats, M. L^p-bounds for the Beurling-Ahlfors transform // Publicacions Matemàtiques, – 2017. vol. 61:2, – p. 291-336.
[109] Rybkin, A.V. On A-integrability of the spectral shift function of unitary operators arising in the Lax-Phillips scattering theory // Duke Mathematical Journal, – 1996. vol. 83:3, – p. 683-699.
[110] Riesz, M. Sur les fonctions conjuguees // Mathematische Zeitschrift, – 1928. vol. 27:1, – p.218-244.
[111] Stein, E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions / E.M.Stein, – USA: Princeton, University Press, – 1970. – 304 p.
[112] Titchmarsh, E.C. On conjugate functions // Proceedings of the London Mathematical Society, – 1929. vol. 9, – p. 49–80.
[113] Tolsa, X. Regularity of C^1 and Lipschitz domains in terms of the Beurling transform // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, – 2013. vol. 100:2, – p. 137-165.
[114] Tsereteli, O.D. On indefinite A-integrals and (A) Fourier series // Studia Mathematicae, – 1962. vol. 22:1, – p. 59–83.
[115] Tumanov, A. Commutators of singular integrals, the Bergman projection, and boundary regularity of elliptic equations in the plane // Mathematical Research Letters, – 2016. vol. 23:4, – p. 1221-1246.
[116] Vasin, A.V. Regularity of the Beurling Transform in Smooth Domains // Journal of Mathematical Sciences, – 2016. vol. 215:5, – p. 577-584.
[117] Yoneda, K. On generalized A-integrals. I // Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences, – 1969. vol. 45:3, – p. 159-163.

[118] Yoneda, K. On generalized A-integrals. II // Mathematica Japonicae, – 1973. vol. 18:2, – p. 149-167.

[119] Guo, Z., Li, P., Peng, L. L_p boundedness of commutators of Riesz transforms associated to Schrödinger operator // Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2008. vol. 341, – p. 421–432.

[120] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen / D.Hilbert, – Leipzig, Berlin: B.G.Teubner, – 1912. – 312 p.