Н. Б. Керимов, О базисности и равномерной минимальности систем корневых функций дифференциальных операторов. I, *Дифференц. уравнения*, 1996, том 32, номер 3, 317–322

1996. Т. 32, № 3. С. 317 — 322

УДК 517.984.5

О БАЗИСНОСТИ И РАВНОМЕРНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. I

Н. Б. Керимов

В настоящей работе установлены необходимые условия базисности обыкновенного, вообще говоря, несамосопряженного дифференциального оператора порядка n $(n \geq 1)$. Для этих операторов развиваем метод В. А. Ильина [1 — 3], позволяющий получить конструктивные необходимые и достаточные условия базисности в L_p $(1 < p < \infty)$ систем корневых функций для широкого класса краевых задач. В частности, нам удалось показать , что известное условие о "сумме единиц" (см. [4, 5]) является необходимым условием для равномерной минимальности (а следовательно, и базисности) в L_p систем корневых функций дифференциального оператора.

Работа состоит из трех частей. В первой части получены оценки норм корневых функций несамосопряженных дифференциальных операторов и рассмотрен вопрос об отсутствии конечных точек сгущения последовательности собственных значений.

1. Основные определения. На произвольном конечном интервале G вещественной оси рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)u \tag{1.1}$$

с комплекснозначными коэффициентами $p_j(x) \in L_1(G)$ $(j = \overline{1,n})$. Следуя работам [1 — 3], будем исходить из обобщенной трактовки собственных и присоединенных функций (СПФ) оператора (1.1), допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий.

Обозначим через $D_n(G)$ класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно на замкнутом интервале $\overline{G}$. Под собственной функцией оператора (1.1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественно нулю функцию $y_0(x) \in D_n(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_0 + \lambda y_0 = 0$. Аналогично под присоединенной функцией этого оператора порядка m $(m \geq 1)$, отвечающей тому же собственному значению λ и собственной функции $y_0(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $y_m(x) \in D_n(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_m + \lambda y_m = y_{m-1}$. Каждую собственную функцию будем считать присоединенной функцией порядка 0. Каждой собственной функции может соответствовать одна или несколько присоединенных функций, отвечающих тому же собственному значению.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_k(x)\}$, состоящую из понимаемых в указанном нами обобщенном смысле СПФ оператора (1.1). Потребуем, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $m \geq 1$ эта система содержала также соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка меньше m. Это означает, что каждый элемент $u_k(x)$ системы $\{u_k(x)\}$ принадлежит $D_n(G)$ и почти всюду в G удовлетворяет или уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = 0 \tag{1.2}$$

(в этом случае $u_k(x)$ — собственная функция оператора L), или уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = u_{r(k)}, \tag{1.3}$$

где $r(k)$ однозначно определяется номером k (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{r(k)}$, $u_k(x)$ — присоединенная функция порядка $m \geq 1$, $u_{r(k)}(x)$ присоединенная функция порядка $m-1$).

Далее наряду с собственным значением λ_k будем использовать спектральный параметр μ_k, который определим равенством

$$\mu_k = \begin{cases} [(-1)^{n/2}(-\lambda_k)]^{1/n}, & \text{если } n \text{ четно}, \\ (-i\lambda_k)^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно и } \mathrm{Im}\lambda_k \geq 0, \\ (i\lambda_k)^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно и } \mathrm{Im}\lambda_k < 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $[r\exp(i\varphi)]^{1/n} = r^{1/n}\exp(i\varphi/n)$ при $-\pi/2 < \varphi \leq 3\pi/2$. Всюду в дальнейшем предполагается, что p — фиксированное число, $1/p + 1/q = 1$ и, если специально не оговорено, $1 \leq p \leq \infty$.

Базисные свойства системы $\{u_k(x)\}$ будем исследовать при одном из следующих условий:

Антиаприорная оценка 1. Существует положительная постоянная C_1 такая, что для любой присоединенной функции $u_k(x)$ справедливо неравенство

$$\|u_{r(k)}\|_{L_p(G)} \leq C_1(1 + |\mu_k|)^n \|u_k\|_{L_p(G)}. \tag{1.5}$$

Антиаприорная оценка 2. Существует положительная постоянная C_2 такая, что для любой присоединенной функции $u_k(x)$ справедливо неравенство

$$\|u_{r(k)}\|_{L_p(G)} \leq C_2(1 + |\mu_k|)^{n-1} \|u_k\|_{L_p(G)}. \tag{1.6}$$

Отметим, что антиаприорная оценка (1.5) выполняется для любой системы корневых функций, в которой ранг собственных функций равномерно ограничен (без этого условия постоянная C_1 дополнительно зависит еще от порядка присоединенной функции $u_k(x)$ (см., например, [6 — 8])). Антиаприорная оценка (1.6), в частности, справедлива для любой системы корневых функций оператора второго порядка при условия $\sup\limits_k |\mathrm{Im}\mu_k| < \infty$ и равномерной ограниченности ранга собственных функций (без последнего условия постоянная C_2 зависит еще и от порядка присоединенной функции $u_k(x)$ (см., например, [9 — 11])).

2. О равномерной минимальности. Приведем еще несколько определений и утверждений, которые играют важную роль при формулировке и доказательстве полученных результатов.

Пусть T — некоторое не более чем счетное множество, X — банахово пространство, $\mathcal{X} = \{x_k : k \in T\}$ — семейство векторов пространства X. $\mathcal{X}$ называется минимальным семейством, если $x_k \overline{\in} V(x_j : j \in T \setminus \{k\})$, $k \in T$, и равномерно минимальным, если

$$d(\mathcal{X}) = \inf\{\mathrm{dist}(x_k\|x_k\|^{-1}, V(x_j : j \in T \setminus \{k\})) : k \in T\} > 0, \tag{2.1}$$

где $V(\cdots)$ — замыкание линейной оболочки множества $(\cdots)$, $\|\cdot\|$ — норма пространства X. Семейство $\mathcal{X}' = \{x_k' : k \in T\}$ линейных непрерывных функционалов над X называется биортогональным с $\mathcal{X}$, если $(x_k, x_j') = \delta_{kj}$, где $k, j \in T$ и δ_{kj} — символ Кронекера. Известно [12, с. 171], что

A) $\mathcal{X}$ минимальны тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ обладает биортогональным семейством $\mathcal{X}'$;

B) семейство $\mathcal{X}'$ однозначно определяется по $\mathcal{X}$ в том и только в том случае, когда $V(\mathcal{X}) = X$;

C) если $V(\mathcal{X}) = X$, то $\mathcal{X}$ равномерно минимальна тогда и только тогда, когда

$$\sup_k \|x_k\| \cdot \|x_k'\|' < \infty, \tag{2.2}$$

где $\|\cdot\|'$ — норма сопряженного пространства X'.

Отметим, что если семейство $\mathcal{X}$ образует базис пространства X, то $V(\mathcal{X}) = X$ и удовлетворяется условие (2.2) (см. [13, с. 372]). Следовательно, справедливо утверждение

D) каждый базис пространства X является равномерно минимальным семейством.

Лемма 2.1. *Пусть T — некоторое не более чем счетное множество, $\mathcal{X} = \{x_k : k \in T\}$ — равномерно минимальное семейство векторов пространства X, $\sigma = d(\mathcal{X})$ — число, определенное равенством (2.1). Тогда имеет место неравенство* $\|\sum\limits_{j=1}^{r} \beta_j x_{k_j}\| \geq \dfrac{\sigma}{r} \sum\limits_{j=1}^{r} |\beta_j| \|x_{k_j}\|$, *где* $r \in \mathbb{N}$, $\beta_j \in \mathbb{C}$ $(j = \overline{1,r})$ — *произвольные числа,* $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{j=r}$ — *произвольная подсистема системы* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Из определения числа σ следует, что для произвольных $r \in \mathbb{N}$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in \mathbb{C}$ справедливы неравенства $\|\sum_{j=1}^{r} \beta_j x_{k_j}\| \geq \sigma|\beta_s|\|x_{k_s}\|$ $(s = \overline{1,r})$, где $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{j=r}$ — произвольная подсистема системы $\mathcal{X}$. Отсюда непосредственным суммированием по индексу s $(s = \overline{1,r})$ получается требуемое неравенство. Лемма доказана.

Пусть система $\{u_k(x)\}$ замкнута и минимальна в $L_p(G)$ при фиксированном $p \in [1;\infty)$. Из утверждений А) и Б) следует, что существует и притом единственная система $\{v_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, т. е. такая система, что каждый ее элемент $v_k(x)$ принадлежит классу $L_q(G)$ и для любых номеров k, j справедливо соотношение $(u_k, v_j) = \int\limits_G u_k(x)\overline{v_j(x)}dx = \delta_{kj}$.

3. Оценки решения уравнения $Lu + \rho^n u = f$ **и корневых функций оператора** L. Имеет место [14, с. 154]

Лемма 3.1 (формула Коши). *Пусть* $F(x) \in L_1(G)$ *и* $\rho \in \mathbb{C}$. *Тогда для любого регулярного на* G *решения уравнения* $u^{(n)} + \rho^n u = F$ *справедливо представление*

$$u^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^{n-1} u^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k-s}}{(k-s)!} + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}[F(t) - \rho^n u(t)]dt, \tag{3.1}$$

где $s = \overline{0, n-1}$ *и* a, x — *произвольные точки отрезка* $\overline{G}$.

Пусть

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} |p_k(x)|, \tag{3.2}$$

$$c = 2^{n+2}en^{2n}, \tag{3.3}$$

$$\delta_0 = \sup\{\delta : 0 < \delta < \mathrm{mes}G, 4cn\cdot \sup_{\substack{t_1,t_2 \in G\\ 0 \leq t_2 - t_1 \leq \delta}} \|Q\|_{L_1(t_1,t_2)} \leq 1\}. \tag{3.4}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега очевидно, что $\delta_0 > 0$.

Лемма 3.2. *Пусть* $f(x) \in L_1(G)$. *Тогда любое регулярное на* G *решение уравнения*

$$Lu + \rho^n u = f \tag{3.5}$$

удовлетворяет оценке

$$|u^{(s)}(x)| \leq \mathrm{const}(1 + |\rho|)^{s+1/p}\{\|u\|_{L_p(G_\rho)} + (1 + |\rho|)^{-n+1/q}\|f\|_{L_1(G_\rho)}\}, \tag{3.6}$$

где $s = \overline{0, n-1}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, G_ρ — *произвольный сегмент в* $\overline{G}$, *содержащий точку* x, *длины* $\min\{1, \delta_0, |\rho|^{-1}\}$, *а константа не зависит от* ρ, p, s, x *(а зависит лишь от коэффициентов оператора* L*).*

Доказательство. Пусть $G_\rho = [\alpha; \beta]$. В силу леммы 3.1 справедливо представление

$$u^{(s)}(x) = (\sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^k}{k!})^{(s)} + \gamma(x,s), \tag{3.7}$$

где $x \in G_\rho, s = \overline{0, n-1}$, $\gamma(x,s) = \int\limits_\alpha^x \frac{(x-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}(F(t) - \rho^n u(t))dt$ и

$$F(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(n-k)}(t). \tag{3.8}$$

Рассмотрим функцию $\Phi_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^k}{k!}$ $(\alpha \leq x \leq \beta)$. Так как $\Phi_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$, то известно [14, с. 251], что

$$\|\Phi_{n-1}^{(s)}\|_{C[\alpha;\beta]} \leq c(\beta - \alpha)^{-s-1/p}\|\Phi_{n-1}\|_{L_p(\alpha;\beta)}, \tag{3.9}$$

где c — число, определенное равенством (3.3), и $s=\overline{0,n-1}$.

Из определения многочлена $\Phi_{n-1}(x)$ и из представления (3.7) следует, что при $s=\overline{0,n-1}$ и $\alpha\le x\le\beta$ справедливо равенство $u^{(s)}(x)-\gamma(x,s)=\Phi_{n-1}^{(s)}(x)$. Отсюда и из неравенства (3.9) получим

$$|u^{(s)}(x)-\gamma(x,s)|\le c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\|u(\xi)-\gamma(\xi,0)\|_{L_p(\alpha,\beta)}.$$

Таким образом, при $s=\overline{0,n-1}$ и $\alpha\le x\le\beta$ имеем

$$|u^{(s)}(x)|\le c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\|\gamma(\xi,0)\|_{L_p(\alpha,\beta)}+|\gamma(x,s)|. \tag{3.10}$$

Используя неравенство $\|u\|_{L_1(\alpha,\beta)}\le(\beta-\alpha)^{1/q}\|u\|_{L_p(\alpha,\beta)}$, оценим последние два слагаемые в (3.10):

$$\begin{aligned}\|\gamma(\xi,0)\|_{L_p(\alpha,\beta)}&\le(\beta-\alpha)^{n-1+1/p}[\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}+|\rho|^n\|u\|_{L_1(\alpha;\beta)}]\le\\&\le(\beta-\alpha)^{n-1+1/p}\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}+(\beta-\alpha)^n|\rho|^n\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)},\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$|\gamma(x,s)|\le(\beta-\alpha)^{n-s-1}(\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}+|\rho|^n\|u\|_{L_1(\alpha;\beta)})\le(\beta-\alpha)^{n-s-1}\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}+|\rho|^n(\beta-\alpha)^{n-s-1/p}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}. \tag{3.12}$$

Таким образом, в силу (3.10) — (3.12) при $s=\overline{0,n-1}$ и $\alpha\le x\le\beta$ имеем

$$|u^{(s)}(x)|\le 2c(\beta-\alpha)^{n-s-1}\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}+c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\{1+2(|\rho|(\beta-\alpha))^n\}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}. \tag{3.13}$$

Так как $0<\beta-\alpha\le|\rho|^{-1}$ при $\rho\ne0$, то из оценки (3.13) следует

$$|u^{(s)}(x)|\le 3c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+2c(\beta-\alpha)^{n-s-1}\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}, \tag{3.14}$$

где $s=\overline{0,n-1}$ и $\alpha\le x\le\beta$. Оценим $\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}$. В силу (3.8) и (3.2)

$$\|F\|_{L_1(\alpha;\beta)}\le\|\sum_{k=1}^{n}p_k(t)u^{(n-k)}(t)\|_{L_1(\alpha;\beta)}+\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}\le\|Q\|_{L_1(\alpha;\beta)}\sum_{k=0}^{n-1}\|u^{(k)}\|_{C[\alpha;\beta]}+\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}.$$

Отсюда и из (3.14) получим, что справедливо неравенство

$$|u^{(s)}(x)|\le3c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+2c(\beta-\alpha)^{n-s-1}\|Q\|_{L_1(\alpha;\beta)}\sum_{k=0}^{n-1}\|u^{(k)}\|_{C[\alpha;\beta]}+2c(\beta-\alpha)^{n-s-1}\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}, \tag{3.15}$$

где $s=\overline{0,n-1}$ и $\alpha\le x\le\beta$. Из последней оценки непосредственным суммированием получаем

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{n-1}\|u^{(s)}\|_{C[\alpha;\beta]}&\le3c\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}\sum_{s=0}^{n-1}(\beta-\alpha)^{-s-1/p}+\\+2c\|Q\|_{L_1(\alpha;\beta)}\sum_{k=0}^{n-1}\|u^{(k)}\|_{C[\alpha;\beta]}&\sum_{s=0}^{n-1}(\beta-\alpha)^{n-s-1}+2c\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}\sum_{s=0}^{n-1}(\beta-\alpha)^{n-s-1},\end{aligned} \tag{3.16}$$

поскольку $0<\beta-\alpha\le1$, то из неравенства (3.16) имеем

$$\sum_{s=0}^{n-1}\|u^{(s)}\|_{C[\alpha;\beta]}\le3cn(\beta-\alpha)^{-n+1-1/p}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+2cn\|Q\|_{L_1(\alpha;\beta)}\sum_{k=0}^{n-1}\|u^{(k)}\|_{C[\alpha;\beta]}+2cn\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}. \tag{3.17}$$

Так как $0<\beta-\alpha\le\delta_0$, то из определения (3.4) числа δ_0 и оценки (3.17) получим

$$\sum_{s=0}^{n-1}\|u^{(s)}\|_{C[\alpha;\beta]}\le6cn(\beta-\alpha)^{-n+1-1/p}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+4cn\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}. \tag{3.18}$$

Сопоставляя (3.18), (3.15) и используя неравенство $4cn\|Q\|_{L(\alpha;\beta)}\le1$, получим оценку $|u^{(s)}(x)|\le$ $\le6c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+4c(\beta-\alpha)^{n-s-1}\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}$ и окончательно

$$|u^{(s)}(x)|\le6c(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\{\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+(\beta-\alpha)^{n-1/q}\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}\}. \tag{3.19}$$

По предположению $\beta-\alpha=\min\{1,\delta_0,|\rho|^{-1}\}$. Пусть $\beta-\alpha=\min\{1,\delta_0\}\equiv\delta_1$. Тогда $\delta_1|\rho|\le$ $\le 1, |\rho|\le 1, |\delta_1|\le 1$ и тем самым $(\beta-\alpha)^{-s-1/p}\le\delta_1^{-s-1/p}\le\delta_1^{-s-1/p}(1+|\rho|)^{s+1/p}\le\delta_1^{-n}(1+$ $+|\rho|)^{s+1/p}$,

$$(\beta-\alpha)^{n-1/q}=(\delta_1+\delta_1|\rho|)^{n-1/q}(1+|\rho|)^{-n+1/q}\le(\delta_1+1)^{n-1/q}(1+|\rho|)^{-n+1/q}\le 2^n(1+|\rho|)^{-n+1/q}. \quad (3.20)$$

В силу последних двух неравенств оценка (3.19) в рассматриваемом случае примет вид $|u^{(s)}(x)|\le 6\cdot 2^n\delta_1^{-n}c(1+|\rho|)^{s+1/p}\{\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+(1+|\rho|)^{-n+1/q}\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}\}$.

Пусть $\beta-\alpha=|\rho|^{-1}$. Тогда $\delta_0|\rho|\ge 1, |\rho|\ge 1$, и тем самым

$$(\beta-\alpha)^{-s-1/p}=|\rho|^{s+1/p}\le(1+|\rho|)^{s+1/p},$$

$$(\beta-\alpha)^{n-1/q}=(1+1/|\rho|)^{n-1/q}(1+|\rho|)^{-n+1/q}\le 2^n(1+|\rho|)^{-n+1/q}. \quad (3.21)$$

Как и выше, в силу последних двух неравенств оценка (3.19) в этом случае примет вид $|u^{(s)}(x)|\le 6\cdot 2^n c(1+|\rho|)^{s+1/p}\{\|u\|_{L_p(\alpha;\beta)}+(1+|\rho|)^{-n+1/q}\|f\|_{L_1(\alpha;\beta)}\}$. Лемма полностью доказана.

Используя оценку (3.6), можно получить оценки корневых функций оператора L.

Следствие 3.1. *Для корневых функций оператора (1.1) справедливы оценки*

$$|u_k^{(s)}(x)|\le\mathrm{const}(1+|\mu_k|)^{s+1/p}\|u_k\|_{L_p(G_{\mu_k})} \quad (3.22)$$

(если $u_k(x)$ — собственная функция),

$$|u_k^{(s)}(x)|\le\mathrm{const}(1+|\mu_k|)^{s+1/p}\{\|u_k\|_{L_p(G_{\mu_k})}+(1+|\mu_k|)^{-n}\|u_{r(k)}\|_{L_p(G_{\mu_k})}\} \quad (3.23)$$

(если $u_k(x)$ — присоединенная функция), где $s=\overline{0,n-1}, 1\le p\le\infty, 1/p+1/q=1$, G_{μ_k} — произвольный сегмент в $\overline{G}$, содержащий точку x, длины $\min\{1,\delta_0,|\mu_k|^{-1}\}$, а константа не зависит от k,μ_k,p,s,x (а зависит лишь от коэффициентов оператора L).

Доказательство. Для установления (3.22) достаточно применить оценку (3.6) в случае $f(x)\equiv 0, x\in G$. Для установления (3.23) надо применить оценку (3.6) в случае $f(x)\equiv$ $\equiv u_{r(k)}(x), x\in G$, и учесть тот факт, что если $G_{\mu_k}=[\alpha;\beta]$, то $\|f\|_{L_1(G_{\mu_k})}=\int\limits_\alpha^\beta|u_{r(k)}(x)|dx\le$ $\le(\beta-\alpha)^{1/q}\|u_{r(k)}\|_{L_p(G_{\mu_k})}$, $(\beta-\alpha)^{1/q}\le 2(1+|\mu_k|)^{-1/q}$. Последнее неравенство доказывается так же, как и неравенства (3.20), (3.21).

4. Об отсутствии конечных точек сгущения последовательности собственных значений. Справедлива

Теорема 4.1. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и выполнена антиаприорная оценка (1.5). Если для произвольной $f(x)\in L_q(G)$*

$$\lim_{k\to\infty}(f,u_k)\|u_k\|^{-1}_{L_p(G)}=0 \quad (4.1)$$

то последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения.

Доказательство. Из следствия 3.1 и антиаприорной оценки (1.5) следует, что при $s=\overline{0,n-1}$ и $k=1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$|u_k^{(s)}(x)|\le C_3(1+|\mu_k|)^{s+1/p}\|u_k\|_{L_p(G)}, \quad x\in\overline{G}, \quad (4.2)$$

где C_3 — некоторая положительная постоянная.

Пусть утверждение теоремы неверно. Тогда существуют конечное число a и последовательность $\{\mu_{k_m}\}$ такие, что $\lim\limits_{m\to\infty}=a$. Очевидно, что последовательность $\{\mu_{k_m}\}$ ограничена. Следовательно, в силу (4.2) при всех $s=\overline{0,n-1}, m=1,2,\ldots$ имеем

$$|u_{k_m}^{(s)}(x)|\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)}\le C_4, \quad x\in\overline{G}, \quad (4.3)$$

где C_4 — некоторая положительная постоянная. Далее, используя (4.3) при $s=1$, получим $|u_{k_m}(x)-u_{k_m}(y)|\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)}=|\int\limits_y^x u'_{k_m}(t)dt|\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)}\le C_4|x-y|$, где $x,y\in\overline{G}$ и $m=1,2,\ldots$

Таким образом, доказали, что $\{u_{k_m}(x)\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)}\}$ — равномерно ограниченное, равностепенно непрерывное семейство функций на $\overline{G}$. Следовательно, в силу теоремы Асколи [16, с. 144] можно считать (при необходимости переходя к подпоследовательности), что имеет место (равномерно по $x \in \overline{G}$)

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m}(x)\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)} = \psi(x), \tag{4.4}$$

где $\psi(x)$ — некоторая функция из класса $C(\overline{G})$. Согласно (4.4) и (4.1), имеем $\|\psi\|^2_{L_2(G)} = = \lim\limits_{m\to\infty}(\psi, u_{k_m})\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)} = 0$. Кроме того, из (4.4) следует, что $\|\psi\|_{L_p(G)} = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.1.

Следствие 4.1. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и удовлетворяется антиаприорная оценка (1.5). Если $\{u_k(x)\}$ образует базис пространства $L_p(G)$ $(1 < p < \infty)$, то последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения.*

Доказательство. Пусть $\{u_k(x)\}$ образует базис пространства $L_p(G)$, а $\{v_k(x)\}$ — система, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$. Для доказательства следствия 4.1 достаточно использовать теорему 4.1 и очевидные соотношения

$$\lim_{k\to\infty}(f, u_k)\|v_k\|_{L_q(G)} = 0, \quad \|u_k\|_{L_p(G)}\|v_k\|_{L_q(G)} \geq (u_k, v_k) = 1,$$

$$(f, u_k)\|u_k\|^{-1}_{L_p(G)} = (f, u_k)\|v_k\|_{L_q(G)}(\|u_k\|_{L_p(G)}\|v_k\|_{L_q(G)})^{-1},$$

где $f(x)$ — произвольная функция из $L_q(G)$.

Теорема 4.2. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная равномерно минимальная в $L_p(G)$ система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и удовлетворяется антиаприорная оценка (1.5). Тогда последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения.*

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно. Как показано при доказательстве теоремы 4.1, существует подпоследовательность $\{u_{k_m}(x)\}$ такая, что удовлетворяется соотношение (4.4). Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \|u_{k_m+1}\|u_{k_m+1}\|^{-1}_{L_p(G)} - u_{k_m}\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)}\|_{L_p(G)} = 0. \tag{4.5}$$

С другой стороны, система $\{u_k(x)\}$ равномерна минимальна в $L_p(G)$, и поэтому $\|u_{k_m+1}\|u_{k_m+1}\|^{-1}_{L_p(G)} - u_{k_m}\|u_{k_m}\|^{-1}_{L_p(G)}\|_{L_p(G)} \geq \sigma$, где σ — некоторое положительное число. Последнее неравенство противоречит (4.5). Теорема доказана.

Литература

1. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771 — 794.
2. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 980 — 1009.
3. *Ильин В. А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048 — 1058.
4. *Ломов И. С.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 74 — 86.
5. *Будаев В. Д.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 20 — 29.
6. *Komornik V.* // Acta math. hung. 1985. Vol. 45. P. 451 —457.
7. *Керимов Н. Б.* // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 5. С. 1054 — 1056.
8. *Крицков Л. В.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 64 — 73.
9. *Ломов И. С.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1684 — 1694.
10. *Joo I.* // Acta sci. math. 1982. Vol. 44. P. 87 —93.
11. *Тихомиров В. В.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807 — 810.
12. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. М., 1980.
13. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
14. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1959.
15. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
16. *Рид М., Саймон В.* Методы современной математической физики. М., 1977. Т. 1.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
7 февраля 1996 г.