

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. B. Kerimov, Kh. R. Mamedov, On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1999, Volume 40, Number 2, 325–335

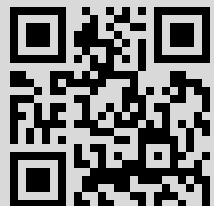
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 85.132.98.9

July 14, 2020, 13:11:36



ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ
В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Н. Б. Керимов, Х. Р. Мамедов

Рассмотрим следующую краевую задачу со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях:

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1, \quad (0.1)$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2)u(0) + u'(0) = 0, \quad (0.2)$$

$$(\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2)u(1) + u'(1) = 0. \quad (0.3)$$

Здесь λ — спектральный параметр, $q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на промежутке $[0, 1]$, α_i, β_i — действительные постоянные. Настоящая работа посвящена изучению свойств собственных значений и собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3). Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях в различных постановках изучались во многих работах [1–12]. Близкие по постановке проблемы изучались в [10–12]. Однако имеется существенное отличие задачи (0.1)–(0.3) от задач, изученных в [10–12]. А именно, в [10–12] предполагалось, что $\alpha_1, \beta_1 = 0$, тогда задача сводится к линейному оператору. В нашем случае в краевом условии присутствует как λ , так и λ^2 , а потому операторную трактовку такой задачи естественно реализовывать в терминах квадратичных операторных пучков (например, см. работу А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликова [13]).

Основным результатом этой работы является теорема 2.1 о числе нулей собственных функций при естественной их нумерации и теорема 4.1 об асимптотических формулах собственных значений и собственных функций. На нетривиальность этой задачи в случае вхождения λ и λ^2 в краевые условия обратил наше внимание А. А. Шкаликов.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$\alpha_0 < 0, \alpha_2 > 0, \beta_0 > 0, \beta_2 < 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0. \quad (0.4)$$

**§ 1. Некоторые свойства собственных значений
краевой задачи (0.1)–(0.3)**

Лемма 1.1. *Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) вещественны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3) и $u(x, \lambda)$ — соответствующая собственная функция. Умножая обе части равенства (0.1) на функцию $\overline{u(x, \lambda)}$, проинтегрируем полученное тождество по x от 0 до 1:

$$-\int_0^1 u''(x, \lambda) \overline{u(x, \lambda)} dx + \int_0^1 q(x) |u(x, \lambda)|^2 dx = \lambda^2 \int_0^1 |u(x, \lambda)|^2 dx. \quad (1.1)$$

Используя формулу интегрирования по частям и краевые условия (0.2), (0.3), получим

$$\int_0^1 u''(x, \lambda) \overline{u(x, \lambda)} dx = (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2) |u(0, \lambda)|^2 - (\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2) |u(1, \lambda)|^2 - \int_0^1 |u'(x, \lambda)|^2 dx.$$

Отсюда и из (1.1) следует, что

$$A(\lambda) \lambda^2 + B(\lambda) \lambda + C(\lambda) = 0,$$

где

$$A(\lambda) = \int_0^1 |u(x, \lambda)|^2 dx + \alpha_2 |u(0, \lambda)|^2 - \beta_2 |u(1, \lambda)|^2,$$

$$B(\lambda) = \alpha_1 |u(0, \lambda)|^2 - \beta_1 |u(1, \lambda)|^2,$$

$$C(\lambda) = \alpha_0 |u(0, \lambda)|^2 - \beta_0 |u(1, \lambda)|^2 - \int_0^1 q(x) |u(x, \lambda)|^2 dx - \int_0^1 |u'(x, \lambda)|^2 dx.$$

Таким образом, собственное значение λ является корнем квадратного уравнения

$$A(\lambda) \lambda^2 + B(\lambda) \lambda + C(\lambda) = 0. \quad (1.2)$$

В силу (0.4) $A(\lambda) > 0$, $C(\lambda) < 0$, и поэтому $B^2(\lambda) - 4A(\lambda)C(\lambda) > 0$. Следовательно, уравнение (1.2) имеет только вещественные корни. Лемма 1.1 доказана.

Аналогично теореме 1.1 из [14, с. 14] можно доказать, что существует единственное решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0, \lambda) = 1, \quad \psi'(0, \lambda) = -\alpha_0 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 \lambda^2, \quad (1.3)$$

причем при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$, функция $\psi(x, \lambda)$ является целой функцией аргумента λ .

Лемма 1.2. *Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) образует не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки. Все собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) простые.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1.2 из [10] устанавливается первая часть леммы. Для доказательства второй части достаточно будет показать, что уравнение

$$(\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2) \psi(1, \lambda) + \psi'(1, \lambda) = 0 \quad (1.4)$$

имеет только простые корни. Действительно, если $\lambda = \lambda^*$ является кратным корнем уравнения (1.4), то имеют место равенства

$$(\beta_0 + \beta_1 \lambda^* + \beta_2 \lambda^{*2}) \psi(1, \lambda^*) + \psi'(1, \lambda^*) = 0, \quad (1.5)$$

$$(\beta_1 + 2\beta_2 \lambda^*) \psi(1, \lambda^*) + (\beta_0 + \beta_1 \lambda^* + \beta_2 \lambda^{*2}) \frac{\partial \psi(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi'(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0. \quad (1.6)$$

Так как $\psi(x, \lambda)$ является решением уравнения (0.1), имеем

$$\frac{d}{dx} [\psi(x, \lambda)\psi'(x, \mu) - \psi(x, \mu)\psi'(x, \lambda)] = (\lambda^2 - \mu^2)\psi(x, \lambda)\psi(x, \mu).$$

Отсюда после интегрирования с учетом (1.3) получим

$$\frac{\psi(1, \lambda)\psi'(1, \mu) - \psi(1, \mu)\psi'(1, \lambda)}{\lambda - \mu} - \alpha_1 = (\lambda + \mu) \left\{ \alpha_2 + \int_0^1 \psi(x, \lambda)\psi(x, \mu) dx \right\},$$

где $\lambda \neq \mu$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $\mu \rightarrow \lambda$ и полагая $\lambda = \lambda^*$, имеем

$$\psi'(1, \lambda^*) \frac{\partial \psi(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} - \psi(1, \lambda^*) \frac{\partial \psi'(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} - \alpha_1 = 2\lambda^* \left\{ \alpha_2 + \int_0^1 \psi^2(x, \lambda^*) dx \right\}. \quad (1.7)$$

Из (1.5) и (1.6) соответственно следуют равенства

$$\begin{aligned} \psi'(1, \lambda^*) &= -(\beta_0 + \beta_1 \lambda^* + \beta_2 \lambda^{*2})\psi(1, \lambda^*), \\ \frac{\partial \psi'(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} &= -(\beta_1 + 2\beta_2 \lambda^*)\psi(1, \lambda^*) - (\beta_0 + \beta_1 \lambda^* + \beta_2 \lambda^{*2}) \frac{\partial \psi(1, \lambda^*)}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Используя эти равенства в (1.7), получим

$$\beta_1 \psi^2(1, \lambda^*) - \alpha_1 = 2\lambda^* \left[\int_0^1 \psi^2(x, \lambda^*) dx + \alpha_2 - \beta_2 \psi^2(1, \lambda^*) \right]. \quad (1.8)$$

Поскольку λ^* — собственное значение, то, как показано в доказательстве леммы 1.1,

$$A(\lambda^*)\lambda^{*2} + B(\lambda^*)\lambda^* + C(\lambda^*) = 0, \quad (1.9)$$

где

$$A(\lambda^*) = \int_0^1 \psi^2(x, \lambda^*) dx + \alpha_2 - \beta_2 \psi^2(1, \lambda^*), \quad (1.10)$$

$$B(\lambda^*) = \alpha_1 - \beta_1 \psi^2(1, \lambda^*), \quad (1.11)$$

$$C(\lambda^*) = \alpha_0 - \beta_0 \psi^2(1, \lambda^*) - \int_0^1 q(x)\psi^2(x, \lambda^*) dx - \int_0^1 \psi'^2(x, \lambda^*) dx.$$

В силу (1.8), (1.10) и (1.11) имеем $\lambda^* = -\frac{B(\lambda^*)}{2A(\lambda^*)}$ (поскольку $A(\lambda^*) > 0$). Отсюда и из (1.9) получим $B^2(\lambda^*) = 4A(\lambda^*)C(\lambda^*)$. Последнее противоречит неравенствам $A(\lambda^*) > 0$, $C(\lambda^*) < 0$. Лемма 1.2 доказана.

§ 2. Осцилляционные свойства собственных функций задачи (0.1)–(0.3)

Лемма 2.1. Пусть $u(x)$ — решение уравнения $u'' + g(x)u = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 1$, $u'(0) = -\alpha_0 - \alpha_1 \lambda' - \alpha_2 \lambda'^2$, а $v(x)$ — решение уравнения $v'' + h(x)v = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $v(0) = 1$, $v'(0) = -\alpha_0 - \alpha_1 \lambda'' - \alpha_2 \lambda''^2$. Кроме того, пусть $g(x) < h(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) и либо $\lambda'' > \lambda' \geq \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$, либо $\lambda'' < \lambda' \leq \min\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$. Тогда если $u(x)$ в интервале $0 < x \leq 1$ имеет t нулей, то $v(x)$ в том же интервале имеет не меньше t нулей и k -й нуль $v(x)$ меньше k -го нуля $u(x)$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $\lambda'' > \lambda' \geq \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$, случай $\lambda'' < \lambda' \leq \min\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$ исследуется аналогично.

Обозначим через x_1 нуль функции $u(x)$ ближайший к точке 0. По теореме Штурма [14, с. 28] достаточно доказать, что $v(x)$ имеет по крайней мере один нуль внутри интервала $[0, x_1]$. Предположим противное. Очевидно, что при $0 \leq x < x_1$ справедливы неравенства $u(x) > 0$, $v(x) > 0$. Так как $u(x_1) = 0$, то в окрестности точки x_1 функция $u(x)$ убывает. Следовательно, $u'(x_1) \leq 0$. Интегрируя тождество $\frac{d}{dx}(u'v - uv') = (h(x) - g(x))u(x)v(x)$ в пределах от 0 до x_1 , получим

$$u'(x_1)v(x_1) - \alpha_1(\lambda'' - \lambda') - \alpha_2(\lambda''^2 - \lambda'^2) = \int_0^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x) dx. \quad (2.1)$$

Так как в $h(x) > g(x)$, $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ в промежутке $(0, x_1)$, то в последнем равенстве правая часть положительна. Кроме того, $u'(x_1)v(x_1) \leq 0$, и поскольку $\alpha_2 > 0$, $\lambda'' > \lambda' \geq \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$, имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda'' - \lambda') + \alpha_2(\lambda''^2 - \lambda'^2) &= (\lambda'' - \lambda')\{\alpha_1 + \alpha_2(\lambda'' + \lambda')\} \\ &> (\lambda'' - \lambda') \left[\alpha_1 + 2\alpha_2 \max\left\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right\} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, левая часть равенства (2.1) отрицательна. Приходим к противоречию. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением краевой задачи (0.1)–(0.3).

Доказательство. Через $\psi(x)$ обозначим решение начальной задачи $-\psi'' + q(x)\psi = 0$, $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = -\alpha_0$. Докажем, что $\beta_0\psi(1) + \psi'(1) \neq 0$. Поскольку $\beta_0 > 0$, достаточно доказать, что $\psi(1)\psi'(1) > 0$.

Интегрируя тождество $-\psi''\psi + q(x)\psi^2 = 0$ в пределах от 0 до 1, получим

$$\psi(1)\psi'(1) = -\alpha_0 + \int_0^1 \psi'(x)^2 dx + \int_0^1 q(x)\psi^2(x) dx.$$

Учитывая условия $\alpha_0 < 0$, $q(x) \geq 0$, имеем $\psi(1)\psi'(1) > 0$. Лемма 2.2 доказана.

Пусть $\psi(x, \lambda)$ — решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.3). Рассмотрим уравнение $\psi(x, \lambda) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$). Из следующей леммы следует, что корни этого уравнения суть непрерывные функции от λ .

Лемма 2.3 [14, с. 30]. Если x_0 ($0 < x_0 < 1$) — нуль функции $\psi(x, \lambda_0)$, то любому достаточно малому числу $\varepsilon > 0$ соответствует такое число $\delta > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ функция $\psi(x, \lambda)$ имеет в точности один нуль в интервале $|x - x_0| < \varepsilon$.

Из этой леммы вытекает

Следствие 2.1 [14, с. 31]. При изменении λ решение $\psi(x, \lambda)$ только тогда может потерять нуль или приобрести новый, если он войдет внутрь интервала или выйдет оттуда через краевые точки 0 и 1.

Следующая осцилляционная теорема доказывает существование счетного множества собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3).

Теорема 2.1. Существует неограниченно убывающая последовательность отрицательных собственных значений $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ и неограниченно возрастающая последовательность положительных собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ краевой задачи (0.1)–(0.3):

$$\dots < \lambda_{-n} < \lambda_{-n+1} < \dots < \lambda_{-1} < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$$

Кроме того, существуют такие числа $n_*, n^* \in \mathbb{N}$ и $k_*, k^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_{-n} ($n \geq n_*$) и λ_n ($n \geq n^*$), имеют соответственно $n + k_* - n_*$ и $n + k^* - n^*$ простых нулей в интервале $(0, 1)$.

Доказательство. Будем доказывать только существование и свойства последовательности положительных собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3). Часть теоремы, относящаяся к отрицательным собственным значениям, доказывается аналогично.

Пусть $\lambda \geq \lambda^* \equiv \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}; -\frac{\beta_1}{2\beta_2}\}$ и $\psi(x, \lambda)$ есть решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.3). В силу леммы 2.1 при возрастании λ число нулей функции $\psi(x, \lambda)$ не убывает.

Пусть $0 \leq q(x) < c$ при $0 \leq x \leq 1$. Решением уравнения

$$y'' + (\lambda^2 - c)y = 0 \quad (2.2)$$

удовлетворяющим начальным условиям (1.3), является функция

$$y = \cos(x\sqrt{\lambda^2 - c}) - \frac{\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - c}} \sin(x\sqrt{\lambda^2 - c}). \quad (2.3)$$

При λ положительном и неограниченно возрастающем число нулей функции (2.3), расположенных в интервале $(0, 1)$, неограниченно растет. Сравним уравнение (0.1) с уравнением (2.2). Из леммы 2.1 следует, что при λ положительном и неограниченно возрастающем число нулей функции $\psi(x, \lambda)$, расположенных в интервале $(0, 1)$, неограниченно растет.

Рассмотрим уравнение $\psi(x, \lambda) = 0$ при $\lambda \geq \lambda^*$. Предположим, что функция $\psi(x, \lambda^*)$ в интервале $(0, 1)$ имеет k^* нулей. На основании леммы 2.3 корни уравнения $\psi(x, \lambda) = 0$ непрерывно зависят от λ . С другой стороны, в силу леммы 2.1 при возрастании λ каждый нуль функции $\psi(x, \lambda)$ передвигается влево, а через точку нуль выйти не может, так как число нулей не убывает. В силу следствия 2.1 нули входят через точку 1. Пусть $\tilde{\lambda}_0$ — первое значение параметра $\lambda \geq \lambda^*$, для которого $\psi(1, \lambda) = 0$. Такое значение, очевидно, найдется. Пусть $\tilde{\lambda}_1$ ($\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_0$) — второе значение параметра λ , для которого $\psi(1, \lambda) = 0$, и т. д. Очевидно, что функция $\psi(x, \tilde{\lambda}_0)$ имеет в интервале $(0, 1)$ ровно k^* нулей. Последовательность $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots$ обладает тем свойством, что функция $\psi(x, \tilde{\lambda}_k)$ имеет в интервале $(0, 1)$ ровно $k + k^*$ нулей, причем $\psi(1, \tilde{\lambda}_k) = 0$. Нетрудно заметить, что числа $\tilde{\lambda}_k$ ($k = 0, 1, \dots$) не являются собственными значениями краевой задачи (0.1)–(0.3).

Функция $\frac{\psi'(1, \lambda)}{\psi(1, \lambda)}$ в интервале $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ строго убывает. Доказательство этого утверждения дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 3.3 из [14, с. 31]. При этом вместо теоремы 3.2 из [14, с. 20] используется лемма 2.1 настоящей работы. Так как $\psi(1, \tilde{\lambda}_k) = \psi(1, \tilde{\lambda}_{k+1}) = 0$, в интервале $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ функция $\frac{\psi'(1, \lambda)}{\psi(1, \lambda)}$ должна строго убывать от $+\infty$ до $-\infty$.

Пусть $P(\lambda) = -\beta_0 - \beta_1\lambda - \beta_2\lambda^2$. Эта функция строго возрастает при $\lambda \geq -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$ и тем более при $\lambda \geq \tilde{\lambda}_0$ (поскольку $\tilde{\lambda}_0 \geq \lambda^* \geq -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$).

Пусть $n^* - 1$ — число собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3), расположенных на отрезке $[0, \tilde{\lambda}_0]$. Поскольку функция $\frac{\psi'(1, \lambda)}{\psi(1, \lambda)}$ в интервале $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$, найдется единственное значение $\lambda_{n^*+k} \in (\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$, для которого $\frac{\psi'(1, \lambda_{n^*+k})}{\psi(1, \lambda_{n^*+k})} = P(\lambda_{n^*+k})$, т. е. выполняется условие (0.3). Следовательно, λ_{n^*+k} есть собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3), а соответствующая собственная функция $\psi(x, \lambda_{n^*+k})$ в интервале $(0, 1)$ имеет столько же нулей, сколько и $\psi(x, \tilde{\lambda}_k)$, т. е. $k + k^*$. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Определение и свойства функции

$\theta_m(x)$ ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $u_m(x)$ — собственная функция краевой задачи (0.1)–(0.3), соответствующая собственному значению λ_m , где $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Пусть

$$\Delta = \max \left\{ \frac{|\alpha_1| + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}; \frac{|\beta_1| + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}}{2|\beta_2|} \right\} + 1. \quad (3.1)$$

Очевидно, что при $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $|\lambda| \geq \Delta$ справедливы неравенства

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 > 0, \quad \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 < 0. \quad (3.2)$$

Предположим, что N_0 — такое натуральное число, что

$$\lambda_m^2 \geq \Delta_0, \quad \text{где } \Delta_0 = \max\{\Delta, 2C_0 + 1\} \quad \text{и} \quad C_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} q(x),$$

при $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|m| \geq N_0$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $|m| \geq N_0$.

Введем угловую переменную $\theta_m(x) = \text{Arctg} \frac{u_m(x)}{u'_m(x)}$, или, точнее,

$$\theta_m(x) = \arg\{u'_m(x) + iu_m(x)\}. \quad (3.3)$$

Учитывая (0.2), определяем начальное значение

$$\theta_m(0) = -\arctg \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\lambda_m + \alpha_2\lambda_m^2} + \pi. \quad (3.4)$$

Для других x функция $\theta_m(x)$ задается формулой (3.3) с точностью до произвольного слагаемого, кратного 2π , поскольку функции $u'_m(x)$ и $u_m(x)$ не могут обращаться в нуль одновременно. Это выражение, кратное 2π , надлежит зафиксировать так, чтобы функция $\theta_m(x)$ удовлетворяла условию (3.4) и была непрерывной по x . Этим функция $\theta_m(x)$ определяется единственным образом [15, с. 244].

Лемма 3.1 [11]. Функция $\theta_m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\theta'_m(x) = \cos^2 \theta_m(x) + (\lambda_m^2 - q(x)) \sin^2 \theta_m(x)$$

и возрастает на отрезке $[0, 1]$.

Из (3.3) ясно, что нули функции $u_m(x)$ совпадают с точками, в которых $\theta_m(x)$ кратно π . Рассматривая функцию $u_m(x)$, когда x возрастает от 0 до 1, видим, что она имеет нуль в точке $x \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда в этой точке $\theta_m(x)$, возрастая, проходит значение, кратное π .

Так как $0 < \theta_m(0) < \pi$, видим, что при возрастании x от 0 до 1 функция $\theta_m(x)$ последовательно принимает конечное число значений $\pi, 2\pi, \dots$. Поскольку функция $\theta_m(x)$ не может, убывая, стремиться к углу, кратному π , то она достигает углов, кратных π , в порядке возрастания.

Нетрудно заметить, что $u_m(0) \neq 0, u'_m(0) \neq 0$ при $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |m| \geq N_0$, и поэтому функция $\theta_m(x)$, вообще говоря, не принимает неположительных значений.

Обозначим через $x_{m,k}$ ($k = \overline{1, k_m}$) нули собственной функции $u_m(x)$ в интервале $(0, 1)$: $0 < x_{m,1} < x_{m,2} < \dots < x_{m,k_m} < 1$. Из осцилляционной теоремы 2.1 следует, что для всех достаточно больших по модулю значений $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ справедливы равенства $k_{|m|} = |m| + k^* - n^*$ и $k_{-|m|} = |m| + k_* - n_*$.

Повторением аналогичных рассуждений при доказательстве леммы 2.1 из [11] устанавливается

Лемма 3.2. Для собственных значений λ_m ($|m| \geq N_0$) справедливы оценки

$$C_1|m| \leq |\lambda_m| \leq C_2|m|, \tag{3.5}$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные.

Лемма 3.3 [11]. Пусть $q(x) \in C[0, 1]$ и $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\nu < t_{\nu+1} = 1$. Тогда

$$\int_0^1 q(x) dx - \sum_{k=1}^{\nu-1} q(t_k) \Delta t_k = O(\omega(\delta)), \tag{3.6}$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \delta = \max_{1 \leq k \leq \nu} \Delta t_k, \omega(\delta) = \delta + \omega_1(\delta)$ и $\omega_1(\delta)$ — модуль непрерывности функции $q(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Кроме того, если $q(x) \neq \text{const}$, то функция $\omega(\delta)$ в равенстве (3.6) может быть заменена функцией $\omega_1(\delta)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\theta_m(1) = -\text{arctg} \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 \lambda_m + \beta_2 \lambda_m^2} + \pi k_m.$$

**§ 4. Асимптотические формулы
для собственных значений и собственных функций
краевой задачи (0.1)–(0.3)**

Всюду в этом параграфе предполагается, что $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |m| \geq N_0$, где N_0 — число, введенное в § 3.

Пусть $v_m(x)$ — собственная функция краевой задачи (0.1)–(0.3), имеющая $|m|$ нулей в интервале $(0, 1)$. Через μ_m обозначим собственное значение, соответствующее собственной функции $v_m(x)$. Из осцилляционной теоремы 2.1 следует, что $\mu_m = \lambda_{m-k^*+n^*}$ при $m > 0$ и $\mu_m = \lambda_{m+k_*-n_*}$ при $m < 0$.

Нули функции $v_m(x)$ обозначим через $x_{m,k}$: $0 < x_{m,1} < x_{m,2} < \dots < x_{m,|m|} < 1$.

Теорема 4.1. Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\mu_m = \pi(m - \text{sgn } m) + \frac{1}{\pi m} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 q(x) dx + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_2} \right\} + O(m^{-1} \omega(m^{-1})), \tag{4.1}$$

$$v_m(x) = \sin \pi(|m| - 1)x + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию $\tilde{\theta}_m(x) = \arg(v'_m(x) + iv_m(x))$. В силу леммы 3.1 она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\tilde{\theta}'_m(x) = \cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + (\mu_m^2 - q(x)) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) \quad (4.3)$$

и возрастает на отрезке $[0, 1]$. Кроме того,

$$\tilde{\theta}_m(0) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 \mu_m + \alpha_2 \mu_m^2} + \pi, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\theta}_m(1) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 \mu_m + \beta_2 \mu_m^2} + \pi|m|, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\theta}_m(x_{m,k}) = \pi k \quad (1 \leq k \leq |m|). \quad (4.6)$$

Из (4.3) получаем

$$\frac{\tilde{\theta}'_m(x)}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)} = 1 - \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства от 0 до $x_{m,1}$:

$$\int_0^{x_{m,1}} \frac{\tilde{\theta}'_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)} = x_{m,1} - \int_0^{x_{m,1}} \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}.$$

Производя в первом интеграле замену $\tilde{\theta}_m(x) = \varphi$ и учитывая (4.6), получим

$$\int_{\tilde{\theta}_m(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = x_{m,1} - \int_0^{x_{m,1}} \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}.$$

Действуя аналогичным образом, имеем

$$\int_{\pi|m|}^{\tilde{\theta}_m(1)} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = 1 - x_{m,|m|} - \int_{x_{m,|m|}}^1 \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)},$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = x_{m,k+1} - x_{m,k} - \int_{x_{m,k}}^{x_{m,k+1}} \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)},$$

где $1 \leq k \leq |m| - 1$. Учитывая (4.4), (4.5) и лемму 3.2, непосредственным вычислением легко убедиться в том, что

$$\int_{\tilde{\theta}_m(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\alpha_2 \mu_m^2} + O(m^{-3}),$$

$$\int_{\pi|m|}^{\tilde{\theta}_m(\pi)} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = -\frac{1}{\beta_2 \mu_m^2} + O(m^{-3}),$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{|\mu_m|} \quad (1 \leq k \leq |m| - 1).$$

Из последних шести равенств следует, что

$$x_{m,1} - \int_0^{x_{m,1}} \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)} = \frac{1}{\alpha_2 \mu_m^2} + O(m^{-3}), \quad (4.7)$$

$$1 - x_{m,|m|} - \int_{x_{m,|m|}}^1 \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)} = -\frac{1}{\beta_2 \mu_m^2} + O(m^{-3}), \quad (4.8)$$

$$x_{m,k+1} - x_{m,k} - \int_{x_{m,k}}^{x_{m,k+1}} \frac{q(x) \sin^2 \tilde{\theta}_m(x) dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)} = \frac{\pi}{|\mu_m|} \quad (1 \leq k \leq |m| - 1). \quad (4.9)$$

Дословно повторяя рассуждения, используемые для доказательства равенств (3.7)–(3.9) в [11], из соотношений (4.7)–(4.9) получим справедливость следующих равенств:

$$x_{m,1} = \frac{1}{\alpha_2 \mu_m^2} + O(m^{-3}), \quad (4.10)$$

$$1 - x_{m,|m|} = -\frac{1}{\beta_2 \mu_m^2} + O(m^{-3}), \quad (4.11)$$

$$x_{m,k+1} - x_{m,k} = \frac{\pi}{|\mu_m|} + O(m^{-3}) \quad (1 \leq k \leq |m| - 1), \quad (4.12)$$

$$x_{m,k+1} - x_{m,k} - \frac{\pi q(x_{m,k})}{2|\mu_m|^3} = \frac{\pi}{|\mu_m|} + O(m^{-3} \omega(m^{-1})) \quad (1 \leq k \leq |m| - 1). \quad (4.13)$$

В силу (4.13) имеем

$$x_{m,|m|} - x_{m,1} - \frac{1}{2\mu_m^2} \sum_{k=1}^{|m|-1} \frac{\pi q(x_{m,k})}{|\mu_m|} = \frac{\pi(|m| - 1)}{|\mu_m|} + O(m^{-2} \omega(m^{-1})). \quad (4.14)$$

Из (4.12) получаем

$$\frac{\pi}{|\mu_m|} = \Delta x_{m,k} + O(m^{-3}) \quad (1 \leq k \leq |m| - 1).$$

Отсюда и из леммы 3.3 следует, что

$$\sum_{k=1}^{|m|-1} \frac{\pi q(x_{m,k})}{|\mu_m|} = \sum_{k=1}^{|m|-1} q(x_{m,k}) \Delta x_{m,k} + O(m^{-2}) = \int_0^1 q(x) dx + O(\omega(m^{-1})).$$

В силу последнего и (4.14) имеем

$$x_{m,|m|} - x_{m,1} - \frac{1}{2\mu_m^2} \int_0^1 q(x) dx = \frac{\pi(|m| - 1)}{|\mu_m|} + O(m^{-2} \omega(m^{-1})). \quad (4.15)$$

Суммируя (4.10), (4.11) и (4.15), получим

$$\frac{\pi(|m| - 1)}{|\mu_m|} = 1 - \frac{\gamma}{\mu_m^2} + O(m^{-2}\omega(m^{-1})), \quad (4.16)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_0^1 q(x) dx + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_2}.$$

Из (4.16) следует справедливость следующих соотношений:

$$|\mu_m| = \pi(|m| - 1) \left(1 + \frac{\gamma}{\mu_m^2} + O(m^{-2}\omega(m^{-1}))\right),$$

$$\frac{1}{\mu_m^2} = \frac{1}{\pi^2(|m| - 1)^2} + O(m^{-4}).$$

Следовательно,

$$|\mu_m| = \pi(|m| - 1) + \frac{\gamma}{\pi(|m| - 1)} + O(m^{-1}\omega(m^{-1})).$$

Отсюда в силу равенств $|\mu_m| = \mu_m \operatorname{sgn} m$ и $(|m| - 1)^{-1} = |m|^{-1} + O(m^{-2})$ получаем формулу (4.1).

Собственную функцию $v_m(x)$ будем искать в виде

$$v_m(x) = \frac{\operatorname{sgn} m}{2i(\alpha_0 + \alpha_1\mu_m + \alpha_2\mu_m^2)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \mu_m) & \varphi_2(x, \mu_m) \\ U(\varphi_1(x, \mu_m), \mu_m) & U(\varphi_2(x, \mu_m), \mu_m) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_j(x, \lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)(1 + O(1/\lambda))$ ($j = 1, 2$), $\omega_1 = -\omega_2 = i$ (см. [16, с. 59]) и $U(y, \lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0) + y'(0)$. Отсюда с помощью равенств $\mu_m = \pi(m - \operatorname{sgn} m) + O(1/m)$, $U(\varphi_j(x, \mu_m), \mu_m) = (\alpha_0 + \alpha_1\mu_m + \alpha_2\mu_m^2)(1 + O(1/m))$ легко можно получить представление 4.2. Теорема 4.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что формулу 4.2 можно уточнить.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При конкретных значениях чисел α_j , β_j ($j = \overline{0, 2}$) можно явно вычислить число нулей собственных функций задачи (0.1)–(0.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition // *Math. Z.* 1973. Bd 133, N 4. S. 301–312.
2. Schneider A. A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // *Math. Z.* 1974. Bd 136, N 2. S. 163–167.
3. Fulton C. T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 1977. V. 77. P. 293–308.
4. Hinton D. B. An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition // *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2).* 1979. V. 30, N 2. P. 33–42.
5. Руссаковский Е. М. Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия // *Функцион. анализ и его прил.* 1975. Т. 9, № 4. С. 91–92.
6. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // *Функцион. анализ и его прил.* 1982. Т. 16, № 4. С. 92–93.
7. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // *Тр. семинаров им. И. Г. Петровского.* 1983. Вып. 9. С. 190–229.
8. Махмудов А. П. Нелинейные возмущения регулярных спектральных задач с параметром в граничных условиях и о полноте их собственных функций // *Докл. АН СССР.* 1984. Т. 277, № 6. С. 1318–1323.

9. Мелешко С. В., Покорный Ю. В. Об одной вариационной краевой задаче // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1466–1467.
10. Керимов Н. Б., Аллахвердиев Т. И. Об одной краевой задаче. I // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 54–60.
11. Керимов Н. Б., Аллахвердиев Т. И. Об одной краевой задаче. II // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 952–960.
12. Binding P. A., Browne P. J., Seddighi K. Sturm — Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1994. V. 37, N 1. P. 57–72.
13. Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. К теории самосопряженных квадратичных пучков операторов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 6. С. 40–50.
14. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
15. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
16. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

г. Баку, г. Москва

Статья поступила 14 февраля 1997 г.