

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФОРМУЛА СЛЕДА ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Asymptotic distribution of eigenvalues of a problem generated by the Sturm–Liouville operator equation is studied. The formula of regularized trace of the corresponding operator is obtained.

Вивчається асимптотичний розподіл власних значень задачі, що породжена операторним рівнянням Штурма–Ліувілля. Отримано формулу регуляризованого сліду відповідного оператора.

Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство,  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение и  $\|\cdot\|$  – норма в нем. Пусть также  $L_2 = L_2((0, 1), H) \oplus H$ . Скалярное произведение в  $L_2$  задается как

$$(Y, Z)_{L_2} = \int_0^1 (y(t), z(t)) dt - \frac{1}{h} (y_1, z_1), \quad (1)$$

где

$$Y = \{y(t), y_1\}, \quad Z = \{z(t), z_1\}, \quad y(t), z(t) \in L_2((0, 1), H), \\ y_1, z_1 \in H, \quad h = \text{const} < 0.$$

В пространстве  $L_2((0, 1), H)$  рассмотрим задачу

$$-y''(t) + Ay(t) + q(t)y(t) = \lambda y(t), \quad (2)$$

$$y(0) = 0, \quad (3)$$

$$y(1) - hy'(1) = \lambda y(1), \quad (4)$$

где  $A$  – самосопряженный положительно определенный оператор в  $H$  (можно считать, что  $A > E$ ,  $E$  – единичный оператор в  $H$ ), который является обратным для вполне непрерывного.

Предположим также, что операторная функция  $q(t)$  слабоизмерима,  $\|q(t)\|$ , как функция от  $t$ , ограничена на  $[0, 1]$  и удовлетворяет следующим условиям:

1)  $q(t)$  имеет вторую слабую производную на  $[0, 1]$ , и  $q^{(l)}(t)$ ,  $l = 0, 1, 2$ , при каждом  $t \in [0, 1]$  являются ядерными самосопряженными операторами в  $H$ , т. е.  $q^{(l)}(t) \in \sigma_1$ ,  $[q^{(l)}(t)]^* = q^{(l)}(t)$ ;

2) функции  $\|q^{(l)}(t)\|_1$ ,  $l = 0, 1, 2$ , ограничены на отрезке  $[0, 1]$ ;

3)  $q'(0) = q'(1) = 0$ ;

4)  $\int_0^1 (q(t)f, f) dt = 0$  при любом  $f \in H$ .

Здесь  $\sigma_1$  – пространство компактных операторов, сингулярные числа которых образуют сходящийся ряд [1, с. 121] с нормой  $\|\cdot\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$ , где  $s_n$  – сингулярные

числа оператора. Если  $B$  — самосопряженный ядерный оператор в  $H$  и  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ортонормированный базис из его собственных элементов, то [1] (теорема 8.6)

$$\|B\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |(B\varphi_n, \varphi_n)|.$$

При  $q(t) \equiv 0$  с задачей (2)–(4) в пространстве  $L_2$  можно связать самосопряженный оператор  $L_0$  с областью определения  $D(L_0) = \{Y \in L_2 / -y''(t) + Ay(t) \in L_2(H, (0, 1)), y(0) = 0 \text{ и } y_1 = y(1)\}$ , действующий как

$$L_0(Y) = \{-y''(t) + Ay(t), y(1) - hy'(1)\}.$$

При  $q(t) \neq 0$  соответствующий оператор обозначим  $L = L_0 + Q$ , где  $Q: Q\{y(t), y(1)\} = \{q(t)y(t), 0\}$  — ограниченный самосопряженный оператор в  $L_2$ .

Цель настоящей работы — установить дискретность спектра задачи (2)–(4), изучить асимптотическое распределение собственных значений и получить формулу первого регуляризованного следа оператора  $L$ .

Легко проверить, что, вводя гильбертово пространство со скалярным произведением, определенным по формуле (1), получаем самосопряженный в  $L_2$  оператор  $L$ .

Впервые Вальтер [2], рассматривая скалярную задачу Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии, показал, что можно связать с ней самосопряженный оператор, подобрав подходящее гильбертово пространство, и доказал теорему разложения, используя самосопряженность этого оператора. Далее этот подход был использован Фултоном [3].

Дифференциально-операторные уравнения изучались в работах [4–7], в которых спектральный параметр содержался в граничных условиях.

В работе [7] для оператора, рассмотренного в [5], получена формула следа. В [5] изучено асимптотическое распределение собственных значений.

Для спектральных задач без параметра в граничном условии более точные (многочленные) асимптотические формулы найдены в [8].

Формула регуляризованного следа была впервые получена И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [9]. После этой работы появились многочисленные исследования, посвященные изучению этого вопроса как для конкретных операторов (см. например, [10–14]), так и дифференциально-операторных уравнений [7, 15, 16] и дискретных абстрактных операторов [17, 18]. Более полную библиографию можно найти в [19].

Формулы регуляризованных следов применяются для вычисления первых собственных значений [11].

В п. 1 доказано, что оператор  $L_0$  имеет дискретный спектр. В п. 2 получена асимптотическая формула для собственных значений. В п. 3 с помощью асимптотики собственных значений доказано, что ряд, названный регуляризованным следом, сходится абсолютно (лемма 4). Для вычисления значения ряда использован метод контурного интегрирования.

**1. Дискретность спектра.** Сначала исследуем задачу (2)–(4) при  $q(t) \equiv 0$ . Условие  $A > E$  влечет положительную определенность оператора  $L_0$  в  $L_2$ . Действительно, для любого  $Y \in D(L_0)$  имеем

числа оператора. Если  $B$  — самосопряженный ядерный оператор в  $H$  и  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ортонормированный базис из его собственных элементов, то [1] (теорема 8.6)

$$\|B\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |(B\varphi_n, \varphi_n)|.$$

При  $q(t) \equiv 0$  с задачей (2)–(4) в пространстве  $L_2$  можно связать самосопряженный оператор  $L_0$  с областью определения  $D(L_0) = \{Y \in L_2 / -y''(t) + Ay(t) \in L_2(H, (0, 1)), y(0) = 0 \text{ и } y_1 = y(1)\}$ , действующий как

$$L_0(Y) = \{-y''(t) + Ay(t), y(1) - hy'(1)\}.$$

При  $q(t) \neq 0$  соответствующий оператор обозначим  $L = L_0 + Q$ , где  $Q: Q\{y(t), y(1)\} = \{q(t)y(t), 0\}$  — ограниченный самосопряженный оператор в  $L_2$ .

Цель настоящей работы — установить дискретность спектра задачи (2)–(4), изучить асимптотическое распределение собственных значений и получить формулу первого регуляризованного следа оператора  $L$ .

Легко проверить, что, вводя гильбертово пространство со скалярным произведением, определенным по формуле (1), получаем самосопряженный в  $L_2$  оператор  $L$ .

Впервые Вальтер [2], рассматривая скалярную задачу Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии, показал, что можно связать с ней самосопряженный оператор, подобрав подходящее гильбертово пространство, и доказал теорему разложения, используя самосопряженность этого оператора. Далее этот подход был использован Фултоном [3].

Дифференциально-операторные уравнения изучались в работах [4–7], в которых спектральный параметр содержался в граничных условиях.

В работе [7] для оператора, рассмотренного в [5], получена формула следа. В [5] изучено асимптотическое распределение собственных значений.

Для спектральных задач без параметра в граничном условии более точные (многочленные) асимптотические формулы найдены в [8].

Формула регуляризованного следа была впервые получена И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [9]. После этой работы появились многочисленные исследования, посвященные изучению этого вопроса как для конкретных операторов (см. например, [10–14]), так и дифференциально-операторных уравнений [7, 15, 16] и дискретных абстрактных операторов [17, 18]. Более полную библиографию можно найти в [19].

Формулы регуляризованных следов применяются для вычисления первых собственных значений [11].

В п. 1 доказано, что оператор  $L_0$  имеет дискретный спектр. В п. 2 получена асимптотическая формула для собственных значений. В п. 3 с помощью асимптотики собственных значений доказано, что ряд, названный регуляризованным следом, сходится абсолютно (лемма 4). Для вычисления значения ряда использован метод контурного интегрирования.

**1. Дискретность спектра.** Сначала исследуем задачу (2)–(4) при  $q(t) \equiv 0$ . Условие  $A > E$  влечет положительную определенность оператора  $L_0$  в  $L_2$ . Действительно, для любого  $Y \in D(L_0)$  имеем

$$\begin{aligned} (L_0 Y, Y)_{L_2} &= \int_0^1 (-y''(t) + Ay(t), y(t)) dt - \frac{1}{h} (y(1) - h(y'(1), y(1))) = \\ &= \int_0^1 \|y'(t)\|^2 dt + \int_0^1 (Ay(t), y(t)) dt - \frac{1}{h} \|y(1)\|^2 > \\ &> \int_0^1 \|y(t)\|^2 dt - \frac{1}{h} \|y(1)\|^2 = \|Y\|_{L_2}^2, \end{aligned}$$

т. е. оператор  $L_0$  положительно определен.

Пусть числа  $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_k \leq \dots$  являются собственными значениями, а  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — соответствующими им ортонормированными в  $H$  собственными векторами оператора  $A$ . Пусть  $y(t) \in D(A) \forall t \in [0, 1]$ . Положим  $y_k(t) = (y(t), \varphi_k)$ , тогда

$$(y, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t)|^2, \quad (Ay, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |y_k(t)|^2.$$

**Теорема 1.** При условии вполне непрерывности  $A^{-1}$  в  $H$  оператор  $L_0$  имеет дискретный спектр.

**Доказательство.** Поскольку  $L_0$  положительно определен, для доказательства дискретности спектра по теореме Реллиха [20, с. 386] (теорема 11) достаточно показать компактность в  $L_2$  множества векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \left\{ Y \in D(L_0) / (L_0 Y, Y) = \right. \\ &= \left. \int_0^1 [(y'(t), y'(t)) dt + (Ay(t), y(t))] dt - \frac{1}{h} (y(1), y(1)) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Сначала докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** Для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $R = R(\varepsilon)$ , что

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt - \frac{1}{h} \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 < \varepsilon.$$

**Доказательство.** При  $Y \in \mathbf{Y}$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{\gamma_R} \int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 \gamma_R dt \leq \frac{1}{\gamma_R} \int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 \gamma_k dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma_R} \int_0^1 (Ay(t), y(t)) dt \leq \frac{1}{\gamma_R}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\gamma_R \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow \infty$ , для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать такое  $R(\varepsilon)$ , что  $\frac{1}{\gamma_R} < \frac{\varepsilon^2}{(1-2/h)^2}$ . Тогда для выбранного  $R$  выполняется

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{(1-2/h)^2}. \quad (5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h} \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 &= -\frac{1}{h} \sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int_0^1 (y_k^2(t))' dt \right| = \\ &= -\frac{1}{h} \sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int_0^1 2y_k'(t) y_k(t) dt \right| \leq \\ &\leq -\frac{2}{h} \sum_{k=R+1}^{\infty} \left( \int_0^1 |y_k'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq -\frac{2}{h} \left( \sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq -\frac{2}{h} \left( \frac{1}{\gamma_R} \sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq -\frac{2}{\sqrt{\gamma_R} h} < -\frac{2}{h} \frac{\varepsilon}{1-2/h}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt - \frac{1}{h} \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 < \\ < \frac{\varepsilon^2}{(1-2/h)^2} - \frac{2\varepsilon/h}{1-2/h} < \frac{\varepsilon}{1-2/h} - \frac{2\varepsilon/h}{1-2/h} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть  $Y \in \mathbf{Y}$ . Обозначим через  $E_R$  множество векторов  $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_R\}$ , где  $\tilde{y}_k = \{y_k(t), y_k(1)\} \in L_2(0,1) \oplus \mathbf{C}$ . Из леммы 1 следует, что  $E_R$  есть  $\varepsilon$ -сеть в  $L_2$  для  $\mathbf{Y}$ .

Поскольку  $|y_k(1)| \leq 1$ ,  $k = \overline{1, R}$ , и к  $y_k(t)$  применим критерий компактности в  $L_2(0,1)$  [21, с. 291],  $E_R$  компактен в  $L_2$ , что завершает доказательство теоремы.

## 2. Асимптотическое распределение собственных значений оператора $L_0$ .

Предположим, что собственные числа оператора  $A$  таковы:  $\gamma_n \sim an^\alpha$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

Учитывая спектральное разложение оператора  $A$ , для коэффициентов  $y_k(t) = (y(t), \varphi_k)$  получаем следующую задачу:

$$-y_k''(t) = (\lambda - \gamma_k) y_k(t), \quad t \in (0,1), \quad (7)$$

$$y_k(0) = 0, \quad (8)$$

$$y_k(1) - hy'_k(1) = \lambda y_k(1). \quad (9)$$

Решение задачи (7), (8) имеет вид

$$y_k(t) = \sin \sqrt{\lambda - \gamma_k} t.$$

Для того чтобы оно еще удовлетворяло (9), необходимо и достаточно, чтобы

$$\sin(\sqrt{\lambda - \gamma_k}) - h\sqrt{\lambda - \gamma_k} \cos(\sqrt{\lambda - \gamma_k}) = \lambda \sin(\sqrt{\lambda - \gamma_k}) \quad (10)$$

хотя бы при одном  $\gamma_k$  ( $\lambda \neq \gamma_k$ ). Таким образом, спектр оператора  $L_0$  состоит из тех вещественных  $\lambda \neq \gamma_k$ , которые хотя бы при одном  $k$  удовлетворяют (10).

Обозначим  $z = \sqrt{\lambda - \gamma_k}$ . Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\sin z - hz \cos z = (z^2 + \gamma_k) \sin z. \quad (11)$$

Взяв  $z = iy$ , запишем уравнение (11) в виде

$$(\gamma_k - y^2 - 1) \frac{e^{-y} - e^y}{2i} + h i y \operatorname{ch} y = 0,$$

или

$$h y \operatorname{cth} y + (\gamma_k - y^2 - 1) = 0. \quad (12)$$

Обозначим

$$g_k(y) = \begin{cases} h y \operatorname{cth} y + \gamma_k - y^2 - 1 & \text{при } y > 0, \\ h + \gamma_k - 1 & \text{при } y = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$g'_k(y) = h \operatorname{cth} y - \frac{h y}{\operatorname{sh}^2 y} - 2y = \frac{h \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - h y - 2y \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y}.$$

Поскольку при  $y > 0$   $\operatorname{ch} y > y$ , то  $h \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - h y = -h(y - \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y) < 0$ .

Таким образом,  $g'_k(y) < 0$  при  $y > 0$ . Учитывая, что  $g_k(0) = h + \gamma_k - 1 > 0$  при  $\gamma_k > 1 - h$ ,  $g_k(\sqrt{\gamma_k}) = h\sqrt{\gamma_k} \operatorname{cth} \sqrt{\gamma_k} - 1 < 0$  и функция  $g_k(y)$  монотонно убывает, заключаем, что в промежутке  $(0, \sqrt{\gamma_k})$  она, начиная с некоторого  $k$ , имеет точно один корень.

Найдем асимптотику корней уравнения (12). При больших  $y$  имеем

$$\operatorname{cth} y = 1 + \frac{2e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = 1 + 2e^{-2y} + O(e^{-4y}).$$

Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\gamma_k - y^2 - 1 + h y (1 + O(e^{-2y})) = 0,$$

или же  $y^2 - h y - \gamma_k + 1 + o(1) = 0$ . Отсюда  $y = \frac{h}{2} + \sqrt{\gamma_k + \frac{h^2}{4} - 1 + o(1)}$ .

Из  $\sqrt{\lambda - \gamma_k} = i \left( \frac{h}{2} + \sqrt{\gamma_k + \frac{h^2}{4} - 1 + o(1)} \right)$  получаем  $\lambda_k = -h\sqrt{\gamma_k} + 1 - \frac{h^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}\right)$ .

Найдем асимптотику тех решений уравнения (10), которые больше  $\gamma_k$ , другими словами, вещественных корней уравнения (11). Запишем это уравнение в виде  $1 - z^2 + \gamma_k - h z \operatorname{ctg} z = 0$ ,  $z \in (0, \infty)$ , или

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1 - z^2 + \gamma_k}{hz}. \quad (13)$$

Рассмотрим функцию  $\frac{hz \operatorname{ctg} z - 1 + z^2 - \gamma_k}{hz} = \frac{f_k(z)}{hz}$ . Поскольку в каждом промежутке  $(\pi n, \pi(n+1))$   $f_k(z)$  принимает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$  и

$$f'_k(z) = \frac{h \sin z \cos z - hz + 2z \sin^2 z}{\sin^2 z} > 0, \quad h < 0,$$

в нем  $f_k(z)$  имеет только один нуль. Найдем асимптотику больших нулей этой функции. Из (13) имеем

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{arctg} \frac{hz}{1 - z^2 + \gamma_k} + \pi n = \frac{hz}{1 - z^2 + \gamma_k} + o\left(\frac{hz}{1 - z^2 + \gamma_k}\right) + \pi n = \\ &= -\frac{h}{z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) + \pi n = \pi n - \frac{h}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) = \\ &= \pi n - \frac{h}{\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{nz}\right)\right) = \pi n - \frac{h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Соответствующие этим корням собственные значения оператора  $L_0$  имеют вид  $\lambda_{k,n} = \gamma_k + (\pi n)^2 - 2h + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Итак, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Собственные значения оператора  $L_0$  распадаются на две серии:*

$$\lambda_k = -h\sqrt{\gamma_k} + 1 - \frac{h^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}\right), \quad \lambda_{k,n} = \gamma_k + (\pi n)^2 - 2h + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Используя лемму 2, приходим к следующему утверждению.

**Лемма 3.** *Пусть  $A = A^* > E$  в  $H$ ,  $A^{-1}$  вполне непрерывен и  $\gamma_n \sim an^\alpha$  ( $0 < a, \alpha = \operatorname{const} > 0$ ). Тогда*

$$\lambda_n(L_0) \sim \mu_n(L) \sim dn^\delta,$$

где

$$\delta = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha + 2}, & \alpha > 2, \\ \frac{\alpha}{2}, & \alpha < 2, \\ 1, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Доказательство леммы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 2 в [22] (§ 3).

**3. Регуляризованный след оператора  $L$ .** Используя лемму 3 и схему доказательства леммы 1 из [15], можно показать, что существует последовательность натуральных чисел  $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ , для которой выполняется неравенство

$$\lambda_k - \lambda_{n_m} \geq d \left( k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \right), \quad k = n_m, n_m + 1, \dots \quad (14)$$

Обозначим ортонормированные собственные векторы оператора  $L_0$  через  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ . Учитывая лемму 3 и неравенство (14), таким же образом, как и в [15] (лемма 2, теорема 1), можно доказать следующую лемму.

**Лемма 4.** Пусть  $\|q(t)\|$  ограничена на отрезке  $[0, 1]$  и выполняется условие леммы 3. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} (Q\psi_n, \psi_n)_{L_2}, \quad (15)$$

где  $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$  — подпоследовательность, которая удовлетворяет неравенству (14).

Назовем  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n)$  регуляризованным следом оператора  $L$ . Значение этого предела, как будет доказано ниже, не зависит от того, каким образом выбрана последовательность  $\{n_m\}$ , при котором выполняется (14).

Ортонормированные собственные вектор-функции оператора  $L_0$  имеют вид

$$\sqrt{\frac{4x_{k,n}h}{2x_{k,n}h - h \sin 2x_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n} \cos 2x_{k,n}}} \{ \sin(x_{k,n}t)\varphi_k, \sin(x_{k,n})\varphi_k \},$$

$$n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{N, \infty},$$

$$k = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{1, N},$$

где  $x_{n,k}$  — корни уравнения (11) ( $x_{k,0}$  — мнимый корень).

Сначала докажем следующую лемму.

**Лемма 5.** Если операторная функция  $q(t)$  удовлетворяет условиям 1–3 и  $\alpha > 0$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{-x_{k,n}h \cos 2x_{k,n}t f_k(t) dt}{2x_{k,n}h - h \sin 2x_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n} \cos 2x_{k,n}} \right| +$$

$$+ \sum_{k=N}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{2x_{k,0}h \cos(2x_{k,0}t) f_k(t) dt}{2x_{k,0}h - h \sin 2x_{k,0} - 2x_{k,0} + 2x_{k,0} \cos 2x_{k,0}} \right| < \infty, \quad (16)$$

где  $f_k(t) = (q(t)\varphi_k, \varphi_k)$ .

**Доказательство.** Интегрируя дважды по частям и используя условие 3 ( $q'_k(0) = q'_k(1) = 0$ ), имеем

$$\int_0^1 \cos 2x_{k,n}t f_k(t) dt = \frac{1}{2x_{k,n}} \sin 2x_{k,n} f_k(1) - \frac{1}{(2x_{k,n})^2} \int_0^1 \cos(2x_{k,n}t) f_k''(t) dt.$$

С учетом асимптотики  $x_{k,n} = \pi n - \frac{h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$  и условий 1, 2 из последнего соотношения следует абсолютная сходимость двойного ряда в (15).

Также учитывая, что  $x_{k,0} = \sqrt{\gamma_k} + \frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}\right)$ , где  $\gamma_k \sim ak^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , из условий 1, 2 получаем абсолютную сходимость второго ряда в (16).

Предположим, что выполняется условие

$$\int_{1-\delta}^1 \frac{|f_k(t)|}{t-1} < \infty, \quad (17)$$

где  $\delta > 0$  — достаточно малое число.



Докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть выполняется условие леммы 2. Если операторная функция  $q(t)$  удовлетворяет условиям 1–4, а также (17), то справедлива формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n) = -\frac{\operatorname{tr} q(1) + \operatorname{tr} q(0)}{4}.$$

**Доказательство.** Согласно лемме 4

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n) &= \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{-2x_{k,n}h \cos(2x_{k,n}t) f_k(t) dt}{2x_{k,n}h - h \sin 2x_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n} \cos 2x_{k,n}} + \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{-2x_{k,n}h \cos(2x_{k,n}t) f_k(t) dt}{2x_{k,n}h - h \sin 2x_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n} \cos 2x_{k,n}} \equiv \sigma_1 + \sigma_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Для вычисления значения суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{-2x_{k,n}h \cos(2x_{k,n}t) f_k(t) dt}{2x_{k,n}h - h \sin 2x_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n} \cos 2x_{k,n}}$$

при каждом фиксированном  $k$  исследуем асимптотическое поведение функции

$$T_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{-2x_{k,n}h \cos(x_{k,n}t)}{2x_{k,n}h - h \sin 2x_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n} \cos 2x_{k,n}}$$

при  $N \rightarrow \infty$ .

Чтобы вывести формулу для  $T_N(t)$ , представим  $n$ -й член суммы  $T_N(t)$  в виде вычета в точке  $x_{k,n}$  некоторой функции комплексной переменной  $z$ , имеющей полюсы в точках  $x_{k,0}, x_{k,1}, \dots, x_{k,N}$ . Рассмотрим комплексную функцию

$$G(z) = \frac{zh \cos 2zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k) \sin^2 z}.$$

Эта функция имеет простые полюсы в точках  $x_{k,n}$  и  $\pi n$ . Вычет в точке  $x_{k,n}$  будет равен

$$\operatorname{res}_{z=x_{k,n}} G(z) = \frac{-2x_{k,n}h \cos 2x_{k,n}t}{-h \sin 2x_{k,n} + 2hx_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n} \cos 2x_{k,n}},$$

а в точке  $\pi n$

$$\operatorname{res}_{z=\pi n} G(z) = \frac{-\pi n h \cos 2\pi n t}{-h\pi n \cos^2 \pi n} = \cos 2\pi n t.$$

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник с вершинами в  $\pm iB$ ,  $A_N \pm iB$ , который обходит точку  $ix_{k,0}$  слева, а точки  $-ix_{k,0}$  и  $0$  справа. При каждом фиксированном  $k$   $B > x_{k,0}$ . Впоследствии  $B$  стремится в бесконечность, а  $A_N = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$ . При таком выборе  $A_N$  имеем  $x_{k,N} < A_N < x_{k,N+1}$ .

Функция  $G(z)$  является нечетной функцией от  $z$ , поэтому интеграл вдоль части контура, находящейся на мнимой оси, а также по полуокружностям с центрами в  $\pm ix_{k,0}$  обращается в нуль.

Если  $z = u + iv$ , то при больших  $v$  и при  $u \geq 0$  функция  $G(z)$  будет иметь порядок  $O\left(\frac{1}{|v|e^{2|v|(1-t)}}\right)$ , и для заданного значения  $A_N$  интегралы, взятые вдоль верхней и нижней сторон контура, стремятся к нулю при  $B \rightarrow \infty$ .

Таким образом, получаем формулу

$$T_N(t) = -S_N(t) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{-zh \cos 2zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k) \sin^2 z} dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z|=r} \frac{-zh \cos 2zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k) \sin^2 z} dz, \quad z = re^{i\varphi},$$

$-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

где

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^N \cos 2\pi n t.$$

При  $N \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{-zh \cos 2zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z} dz \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi i} \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{\cos 2zt}{\sin 2z\pi + \frac{2}{h} z \sin^2 z\pi} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2N+1)t \operatorname{ch}(2tv) - i \sin(2N+1)t}{-i \operatorname{sh}(2v\pi) + \frac{2}{h} (A_N + iv)(1 + \operatorname{ch}(2v\pi))} dv \equiv I. \quad (19)$$

Легко показать, что

$$|I| < \frac{\operatorname{const}}{A_N \cos \frac{\pi t}{2}}, \quad (20)$$

$$\int_0^1 T_N(t) f_k(t) dt = - \int_0^1 S_N(t) f_k(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 f_k(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{-zh \cos 2zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k) \sin^2 z} dz dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^1 f_k(t) \int_{|z|=r} \frac{-zh \cos 2zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k) \sin^2 z} dz dt. \quad (21)$$

$-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

При  $r \rightarrow 0$ , используя условие 4, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f_k(t) \int_{\substack{|z|=r \\ -\pi/2 < \varphi < \pi/2}} \frac{-zh \cos 2zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k) \sin^2 z} dz dt = \\
& = \int_0^1 f_k(t) \int_{\substack{|z|=r \\ -\pi/2 < \varphi < \pi/2}} \frac{2zh \sin^2 zt}{(-hz \operatorname{ctg} z + 1 - z^2 - \gamma_k) \sin^2 z} dz dt \sim \\
& \sim \int_0^1 f_k(t) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2re^{i\varphi} h (re^{i\varphi} t)^2 d\varphi dt}{(1 - \gamma_k)(re^{i\varphi})^2 - h(re^{i\varphi})^2}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Правая часть (22) при  $r \rightarrow 0$  сходится к 0.

При  $N \rightarrow \infty$  из (19) и (20) с учетом условия (17) получаем, что третий член в правой части (21) тоже стремится к нулю. Итак,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 T_N(t) f_k(t) dt = - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 S_N(t) f_k(t) dt = - \frac{f_k(1) + f_k(0)}{4}. \quad (23)$$

Учитывая (23), из (18) находим

$$\sigma_1 = - \sum_{k=N}^{\infty} \frac{f_k(0) + f_k(1)}{4}.$$

Проводя аналогичные вычисления для  $\sigma_2$ , имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(0) + f_k(1)}{4} = - \frac{\operatorname{tr} q(0) + \operatorname{tr} q(1)}{4},$$

что доказывает справедливость теоремы 2.

Авторы выражают благодарность В. И. Горбачук и М. Л. Горбачуку за их внимание к настоящей работе.

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
2. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. – 1973. – 133. – S. 301–312.
3. Fulton Ch. T. Two-point boundary value problems with eigenvalue contained in the boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1977. – 77. – P. 293–308.
4. Горбачук В. И., Рыбак М. А. О граничных задачах для операторного уравнения Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Прямые и обратные задачи теории рассеяния. – Киев, 1981. – С. 3–13.
5. Рыбак М. А. Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма–Лиувилля // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, № 2. – С. 248–252.
6. Алиев Б. А. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Там же. – 2006. – 58, № 8. – С. 46–52.

7. Асланова Н. М. Формула следа одной граничной задачи для операторного уравнения Штурма–Лиувилля // Сиб. мат. журн. – 2008. – 49, № 6. – С. 1207–1215.
8. Михайлец В. А. Распределение собственных значений операторного уравнения Штурма–Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – 41, № 3. – С. 607–619.
9. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1953. – 88, № 4. – С. 593–596.
10. Дикий Л. А. Новый метод вычисления собственных значений оператора Штурма–Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1957. – 116, № 1.
11. Дикий Л. А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. – 1958. – 13, вып. 3 (81). – С. 111–143.
12. Hilbert R. C., Kramer V. A. Trace formulas for powers of a Sturm–Liouville operator // Can. J. Math. – 1964. – 16, № 4. – P. 412–422.
13. Гасымов М. Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. – 1963. – 150, № 6. – С. 1202–1204.
14. Садовничий В. А. О следе разности двух дифференциальных операторов высших порядков // Дифференц. уравнения. – 1966. – № 12. – С. 1611–1624.
15. Максудов Ф. Г., Байрамогли М., Адыгезалов А. А. О регуляризованном следе оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом // Докл. АН СССР. – 1984. – 277, № 4. – С. 795–799.
16. Гашимов И. Ф. Вычисление регуляризованного следа операторного уравнения Штурма–Лиувилля с особенностью на конечном отрезке. – Алма-Ата, 1989. – 37 с. – Деп. в ВИНТИ, № 7340.
17. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. – 2002. – 193, № 2. – С. 129–152.
18. Дворовский В. В. Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Дифференц. уравнения. – 1991. – 27, № 12. – С. 2164–2166.
19. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов // Успехи мат. наук. – 2006. – 61, № 5. – С. 89–156.
20. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
21. Смирнов В. И. Курс высшей математики. – М., 1959. – Т. 5. – 655 с.
22. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма–Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. – 1972. – 24, № 3. – С. 291–305.

Получено 20.11.09