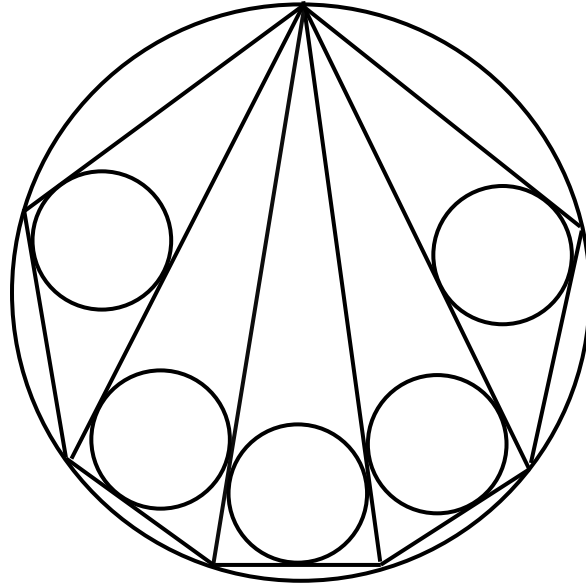


İxtiyar İsmayılov

# Həndəsə məntiqi düşünmədə

*Planimetriyaya aid tərif və anlayışlar*  
*Teoremlər , xassələr və onların isbatı*  
*Çalışma nümunələri və çalışmalar*



“Riyaziyyat və intellekt” seriyasından

*Dördüncü pillə*

BAKI - 2008

**İsbat - məntiqi düşünməyi  
tənzimləyən ən yaxşı  
vasitədir.**

**Rəyçilər:**

**Arif Əhmədov - Bakı PKİ institutunun riyaziyyat  
tədris-metodika kabinetinin müdiri**

**Rövşanə Qəmbərova - Bakı PKİ institutunun riyaziyyat  
tədris-metodika kabinetinin metodisti**

Təlim vəsaitinin bu elektron və çap variantı qəbul imtahanlarına hazırlaşanlar üçün nəzərdə tutulsa da bu vəsaitdən riyaziyyat müəllimləri 7-ci sinifdən başlayaraq öz dərslərində və yaxud hazırlıq kurslarında effektiv və intensiv şəkildə istifadə edə bilərlər.

Təlim kursu kimi ixtisasartırma kurslarında dərs modeli kimi də istifadə oluna bilər.

Sürətli inkişaf proqramına uyğun yazılmış və öz orijinallığı ilə fərqlənən bu vəsait biliyini müstəqil olaraq artırmaq istəyənlər üçün də faydalı ola bilər.

Vəsaitdəki çalışmaların cavabları ayrıca vərəqdə təqdim edilir. Bütün çalışmaların izahlı həlli isə vəsaitin elektron variantına daxil edilmişdir.

**Şagirdlərin təfəkkür fəaliyyətinin inkişafı , izah və isbatetmə mədəniyyətinin formalaşdırılması məqsədi ilə hazırlanmış bu vəsait VII - IX sinif həndəsə proqramını əhatə edir.Bəzi maraqlı əlavələrlə yanaşı vəsaitdə üçbucağa məxsus anlayışlar dilində triqonometrik funksiyaların şərhinə də kifayət qədər yer verilmişdir.**

**ISBN 978-9952-24-040-5**

© İxtiyar İsmayılov

## PROGRAM SƏHİFƏSİ

Nəyi öyrənməli?

1. Nöqtə, düz xətt, müstəvi, fəza ilə ilkin tanışlıq
2. Parça və şüa, parçanın proyeksiyası
3. Bucaq və bucaq cütləri
4. Üçbucaqlar (bucaq üçlükləri)
5. Çevrə və dairə
6. İxtiyari üçbucaqda triqonometriya
7. Dördbucaqlılar
8. Çoxbucaqlılar
9. Vektorlar
10. Müstəvidə koordinatlar metodu

Necə öyrənməli?

Figurun:

1. Tərif
2. Elementləri
3. Növləri
4. Öz xassələri
5. Növlərinin xassələri
6. Elementlərinin xassələri
7. Çalışma nümunələri
8. Çalışmalar

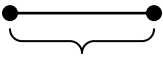
### Mövzuların öyrənilmə ardıcılığı

- |  |   |
|--|---|
| §1. Düz xətt   | §31 Medianın xassələri  |
| §2. Düz xəttin hissələri   | §32. Çalışmalar   |
| §3. Bucaq  | §33. Hündürlüyün xassələri  |
| §4. Çalışmalar   | §34. Üçbucağın sahə düsturları  |
| §5. Bucaq və saatlar. Nöqtə ətrafında dönmə                        | §35. Çalışmalar   |
| §6. Bucaq cütləri  | §36. Tədqiqat xarakterli çalışma nümunələri   |
| §7. Çalışmalar   | §37. İxtiyari üçbucaqda çevirmə düsturları  |
| §8. Üçbucaqla ilkin tanışlıq                                       | §38. İki bucaq cəmi və fərqlinin triqonometrik funksiyaları. İkiqat arqument düsturları |
| §9. Üçbucaqların bərabərlik əlamətləri<br>Fales teoremi. Orta xətt | §39. Çalışmalar   |
| §10. Çalışmalar  | §40. Cəmdən hasilə və tərsinə keçid düsturları  |
| §11. Parçanın (mailin) düz xətt üzərindəki proyeksiyası            | §41. Toxunan, vətər və kəsənin xassələri  |
| §12. Üçbucağın öz xassələri  | §42. Çalışmalar   |
| §13. Çalışmalar  | §43. Oxşar üçbucaqlar   |
| §14. Çevrə və dairə  | §44. Çalışmalar   |
| §15. Çalışmalar  | §45. Dördbucaqlılarla ilkin tanışlıq.<br>Sınıq xətlər                                   |
| §16. Təpəsi çevrə üzərində, daxilində və xaricində olan bucaqlar   | §46. Dördbucaqlının xassələri   |
| §17. Çevrələrin qarşılıqlı vəziyyəti                               | §47. Çalışmalar   |
| §18. Çalışmalar  | §48. Paraleloqramların xassələri  |
| §19. Düzbucaqlı üçbucaq  | §49. Çalışmalar   |
| §20. Düzbucaqlı üçbucağın əsas xassələri                           | §50. Paraleloqramın xüsusi növləri  |
| §21. Çalışmalar  | §51. Çalışmalar   |
| §22. Bərabərtərəfli və bərabəryanlı üçbucaqların xassələri         | §52. Trapesiya  |
| §23. Çalışmalar  | §53. Çalışmalar   |
| §24. Üçbucaq daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr                | §54. Çoxbucaqlılar  |
| §25. İxtiyari üçbucaqda triqonometrik funksiyalar                  | §55. Çoxbucaqlıların xassələri  |
| §26. Çalışmalar  | §56. Çalışmalar   |
| §27. Sinuslar və kosinuslar teoremindən çıxan nəticələr            | §57. Vektorlar  |
| §28. Tənbölənin xassələri  | §58. Müstəvidə koordinatlar metodu  |
| §29. Çalışmalar  | §59. Nöqtələrin $d/x$ üzərində olması şərtləri.<br>İki düz xətt arasındakı bucaq        |
| §30. "Möcüzəli" üçbucaq  | §60. Çalışmalar   |
|  | §61. Nöqtə və düz xəttə (oxa) zərən simmetriya  |

Hər səhifədə bir paraqraf yerləşdirilmişdir

## §1. Düz xətt

•  
Nöqtə

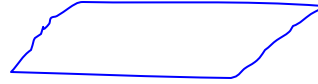


İki nöqtə arasındakı məsafə



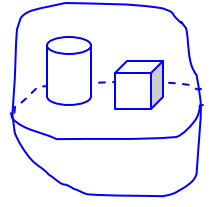
Düz xətt (d/x)

Hər iki tərəfə sonsuz davam edir.



Müstəvi

Hər tərəfə sonsuz davam edir.



Fəza

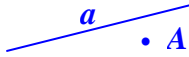
İki nöqtə arasındakı məsafə müsbət ədədlə ölçülür. Praktikada kiçik məsafələr əsasən **xətkeş** (və ya bölgülü **lentlə**) ölçülür.

İki nöqtə üst-üstə düşə bilər, bu halda iki nöqtə arasındakı **məsafə sıfır qəbul** edilir.

Qeyd edək ki, üst-üstə düşən nöqtələr **bir nöqtə** kimi başa düşülür.



**A nöqtəsi a d/x üzərindədir:**  $A \in a$ ,



**A nöqtəsi a d/x-nə aid deyil:**  $A \notin a$ .

**Tərif:** Üst-üstə düşən düz xətlər **eyni**, üst-üstə düşməyən düz xətlər isə **müxtəlif** düz xətlər adlanır.

Eyni d/x-lər bir d/x kimi qəbul edilir.

Müxtəlif d/x-lər iki cür olur: **kəsişən, kəsişməyən**

**Kəsişməyən d/x-lər paralel düz xətlər adlanır.**

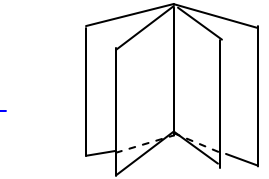
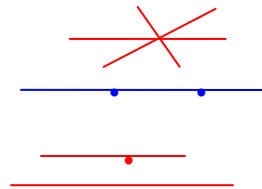


**Kəsişən d/x-lərin yalnız bir ortaq nöqtəsi var.**



**Düz xətt aksiomları**

1. Bir nöqtədən sonsuz sayda d/x keçirmək olar;
2. İki müxtəlif nöqtədən yalnız bir d/x keçirmək olar;
3. Bir düz xətdən sonsuz sayda müstəvi keçirmək olar;
4. Düz xətt xaricindəki nöqtədən bu d/x-ə yalnız bir paralel d/x keçirmək olar;
5. D/x üzərindəki üç nöqtənin biri digər ikisinin arasında yerləşir.



Aşağıdakı mülahizələr **eyni mənə** daşıyır:

- a) A nöqtəsi a d/x üzərindədir;
- b) a d/x A nöqtəsindən keçir;
- c) A nöqtəsi a d/x-nə aiddir;
- d)  $A \in a$  : "A daxildir a".

**Qeyd.** Bütün nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşən fiqur müstəvi fiquru adlanır. **Planimetriya** - həndəsənin müstəvi fiqurları və onların xassələrini öyrənən hissəsidir.

Nöqtə latın əlifbasının **böyük** hərfi, düz xətt (d/x) isə **kiçik** hərfi və ya iki **böyük hərfi** ilə işarə olunur (məs. AB və ya c düz xətti).



$A, B \in c$

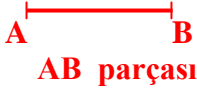
**Tərif:** Yerdəyişmə zamanı d/x özünə paralel d/x-ə keçirsə, belə yerdəyişməyə **özünəparalel yerdəyişmə deyilir**.

Aydındır ki, paralel d/x-lərdən biri digərindən **özünəparalel yerdəyişmə** ilə alınabilir və tərsinə, özünəparalel yerdəyişmə ilə paralel d/x-lər **bir (eyni) d/x-ə** çevrilə bilər.

a və b düz xətlərinin **paralel** olması  $a \parallel b$  kimi işarə olunur.

a və b düz xətlərinin A nöqtəsində **kəsişməsi** simvlik olaraq  $a \cap b = A$  kimi yazılır.

## §2. Düz xəttin hissələri



**Tərif:** Düz xəttin iki nöqtəsi və bu nöqtələr arasındakı nöqtələr çoxluğuna parça deyilir.

Həmin iki nöqtə isə parçanın uc nöqtələridir.

Parça hər iki tərəfdən məhduddur.

AB parçasının uzunluğu dedikdə, A və B nöqtələri arasındakı məsafə başa düşülür.

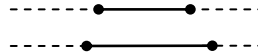
Ucları üst-üstə düşən parçanın uzunluğu 0 - dir.

Uzunluqları bərabər olan parçalar **bərabər parçalar** adlanır.

**Tərif:** Parçaların (şüaların) yerləşdiyi düz xətlər paraleldirsə, belə parçalar (şüalar) paralel parçalar (şüalar) adlanır.

Düz xətt və parçanın paralelliyinə

də eyni qayda ilə tərif verilir.



### Çalışma nümunələri

1) Şəkildə neçə a) parça ; b) şüa vardır?

**Həlli.** a) AB, AC, AD, BC, BD, CD - cəmi **6 parça**;

b) hər nöqtəyə iki şüa uyğun olduğu üçün cəmi  $4 \cdot 2 = 8$  **şüa** vardır.

2)  $AB = 4$  sm,  $BC = 3$  sm,  $CD = 2$  sm olduğunu bilərək, kənardakı parçaların orta nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

**Həlli.**  $AB:2 = 2$ ,  $CD:2 = 1$ . **Cavab:**  $2 + 3 + 1 = 6$  (sm).

### Çalışmalar

**1. Hansı mülahizələr doğrudur?**

1. İki nöqtədən yalnız bir d/x keçir
  2. İki nöqtə yalnız bir d/x üzərindədir
  3. İki nöqtə bir d/x üzərində ola bilər
  4. İki nöqtə iki d/x üzərində ola bilər
  5. İki nöqtə üç d/x üzərində ola bilər
- A) 1, 2, 3 ; B) 1, 3, 4 ; C) 1, 2, 5 ; D) 1, 3, 5 ; E) 3, 4, 5

**2. Hansı mülahizələr yanlışdır?**

1. Bir nöqtədən sonsuz sayda d/x keçir
  2. Üç nöqtədən bir d/x keçə bilər
  3. İki nöqtə üç d/x üzərində ola bilər
  4. Üç nöqtə iki d/x üzərində ola bilər
  5. Bir nöqtə üç d/x üzərində ola bilər
- A) 2, 3 ; B) 3, 4 ; C) 2, 5 ; D) 3, 5 ; E) 3, 4, 5

**3. Mülahizələrdən neçəsi yanlışdır?**

1. D/x hər iki tərəfdən məhduddur
  2. Şüa bir tərəfdən məhduddur
  3. Bir d/x-dən beş müstəvi keçirmək olmaz
  4. Müstəvi yalnız bir tərəfdən məhduddur
  5. Şüa üzərində verilmiş uzunluqda sonsuz sayda parça qurmaq olar
- A) 1 ; B) 2 ; C) 3 ; D) 4 ; E) 5

**4. Mülahizələrdən neçəsi doğrudur?**

1. D/x hər iki tərəfdən məhduddur
2. Şüa bir tərəfdən məhduddur
3. Bir d/x-dən beş müstəvi keçirmək olmaz
4. Müstəvi yalnız bir tərəfdən məhduddur
5. Şüa üzərində verilmiş uzunluqda sonsuz sayda parça qurmaq olar

A) 1 ; B) 2 ; C) 3 ; D) 4 ; E) 5

**5. Düz xətt üzərində A, B, C nöqtələri qeyd edilmişdir. Bu d/x üzərində neçə parça və neçə şüa vardır?**

A) 3; 6 B) 2; 4 C) 3; 5 D) 4; 6 E) 3; 3

**6. Düz xətt üzərində A, B, C, D nöqtələri qeyd edilmişdir. Bu d/x üzərində eyni şüalar hansılardır?**

A) AB və BC; B) AB və CD; C) AB və AC; D) BA və AB; E) AD və BD

**7. Düz xətt üzərində A, B, C, nöqtələri qeyd edilmişdir. Bu d/x üzərində neçə cüt əks şüa vardır?**

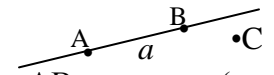
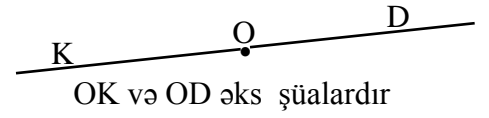
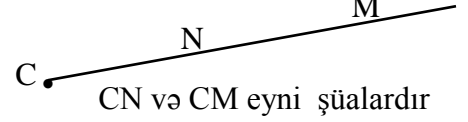
A) 6 ; B) 4 ; C) 9 ; D) 3 ; E) 5



**Tərif:** Düz xəttin bir nöqtəsi və bu nöqtədən eyni tərəfdə yerləşən nöqtələr çoxluğuna şüa deyilir.

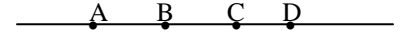
Həmin bir nöqtə şüanın **başlanğıcı** adlanır.

Şüa yalnız bir tərəfdən məhduddur.

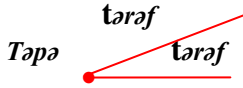


a - AB parçasının (şüasının) yerləşdiyi d/x-dir.

$A, B \in a$  ;  $C \notin a$ .



### §3. Bucaq

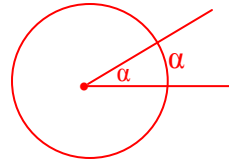
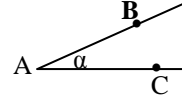


**Tərif:** Bir nöqtədən çıxan iki şüanın əmələ gətirdiyi fiqura bucaq deyilir.

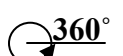
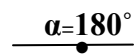
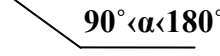
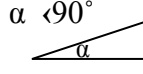
**Tərif:** Təpədən çıxıb bucağı yarıya bölən şüaya tən bölən deyilir.

Bucaq  $\angle A$  və ya  $\angle BAC$  kimi işarə olunur (şəkildə  $\angle A = \alpha$ ).

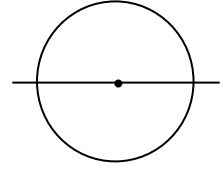
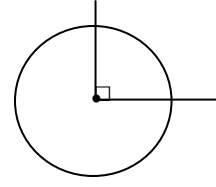
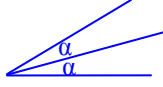
**Bucağın dərəcə ölçüsü dedikdə, mərkəzi bu bucağın təpəsində olan çevrənin bucaq daxilində qalan hissəsinin dərəcə ölçüsü başa düşülür.**



Növləri: iti, düz, kor, açıq bucaq, tam bucaq.



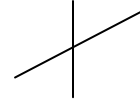
Elementləri: təpə, iki tərəf, tən bölən



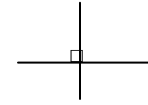
**Çevrənin dərəcə ölçüsü  $360^\circ$  qəbul edilir. Ona görə də düz bucaq  $90^\circ$ , açıq bucaq isə  $180^\circ$ -dir. Digər bucaqların dərəcə ölçüləri transportirle ölçülə bilər.**

☺ *Bir nöqtədən çıxan əks şüalar arasındakı bucağa ... deyilir.*

İki d/x arasındakı **bucaq** dedikdə (böyük və ya kiçik sözü işlənmiş), onların kəsişməsindəki **kiçik bucaq** başa düşülür.



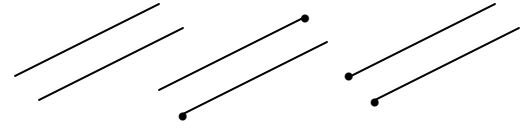
İki d/x arasındakı **bucaq  $90^\circ$ -dirsə**, belə d/x-lər **perpendikulyar** ( $\perp$ ) **d/x-lər**, perpendikulyar d/x-lər üzərində olan parçalar (şüalar) perpendikulyar **parçalar** (**şüalar**) adlanır.



**Paralel d/x-lər arasındakı bucaq  $0^\circ$ -dir.**

**Əks şüalar arasındakı bucaq  $180^\circ$ -dir.**

**Eyni istiqamətli şüalar arasındakı bucaq  $0^\circ$ -dir.**



**Qeyd:** Nöqtədən d/x-ə qədər məsafə dedikdə, bu nöqtədən d/x-ə endirilən perpendikulyarın uzunluğu başa düşülür.



D/x üzərində olan nöqtə ilə bu d/x arasındakı **məsafə 0 -dir.**

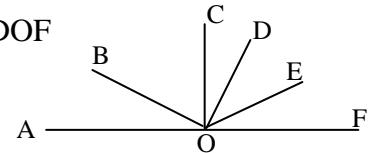
**İki paralel d/x arasındakı məsafə dedikdə bu düz xətlərdən biri üzərindəki ixtiyari nöqtədən digər d/x-ə qədər məsafə başa düşülür.**



#### Çalışma nümunələri

1)  $OC \perp AF$ ,  $\angle DOE = 30^\circ$  olduğunu bilərək,  $COD$  və  $EOF$  bucaqlarının tən bölənləri arasındakı bucağı tapın.

**Həlli:**  $\angle COD:2 + \angle DOE + \angle EOF:2 = (\angle COD + \angle EOF):2 + \angle DOF = (90^\circ - 30^\circ):2 + 30^\circ = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ . Cavab:  **$60^\circ$**



2)  $OC \perp AF$ ,  $BO \perp OD$  olduğunu bilərək, şəkildəki iti bucaqlarının sayını tapın.

Asanlıqla sayı bilərik ki, iti bucaqların **sayı 7-dir.**

## §4. Bucağa aid çalışmaları

1.  $37^\circ$ -li bucağın bir tərəfinə perpendikulyar olan düz xətt digər tərəflə hansı bucağı əmələ gətirir?

A)  $143^\circ$  B)  $53^\circ$  C)  $90^\circ$  D)  $127^\circ$  E)  $43^\circ$

2.  $127^\circ$ -li bucağın bir tərəfinə perpendikulyar olan düz xətt digər tərəflə hansı bucağı əmələ gətirir?

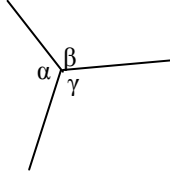
A)  $37^\circ$  B)  $53^\circ$  C)  $90^\circ$  D)  $63^\circ$  E)  $43^\circ$

3. Şəkildəki bucaqlar üçün

$$\alpha - \beta = 40^\circ,$$

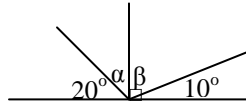
$$\alpha - \gamma = 20^\circ.$$

Ən kiçik bucağı tapın.



A)  $90^\circ$  B)  $80^\circ$  C)  $100^\circ$  D)  $110^\circ$  E)  $120^\circ$

4. Şəkildəki verilənlərə görə  $\alpha$  və  $\beta$  bucaqlarının tən bölənləri arasındakı bucağı tapın.

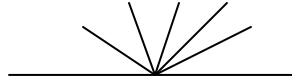


A)  $90^\circ$  B)  $70^\circ$  C)  $65^\circ$  D)  $75^\circ$  E)  $85^\circ$

5. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərinin 25% -nə bərabərdir. Bucaqların fərqi tapın.

A)  $90^\circ$  B)  $80^\circ$  C)  $108^\circ$  D)  $36^\circ$  E)  $144^\circ$

6. Şəkildə neçə bucaq var?



A) 6 B) 20 C) 7 D) 21 E) 22

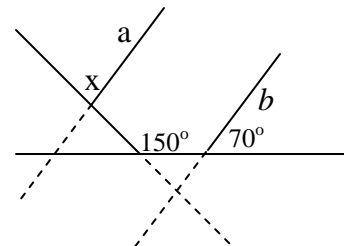
7. Bir saatda dəqiqə əqrəbi neçə dərəcəli bucaq cızır? A)  $90^\circ$  B)  $180^\circ$  C)  $270^\circ$  D)  $360^\circ$  E)  $0^\circ$

8. Bir saatda saat əqrəbi neçə dərəcəli bucaq cızır? A)  $30^\circ$  B)  $18^\circ$  C)  $12^\circ$  D)  $36^\circ$  E)  $24^\circ$

9. Saat 11-də əqrəblər arasındakı bucaq neçə dərəcədir? A)  $40^\circ$  B)  $20^\circ$  C)  $32^\circ$  D)  $30^\circ$  E)  $45^\circ$

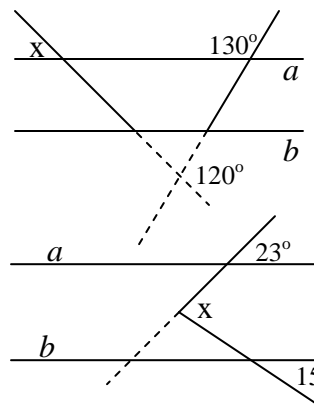
10. Şəkildəki verilənlərə görə ( $a \parallel b$ )  $x$ -i tapın.

A)  $40^\circ$  B)  $60^\circ$  C)  $80^\circ$  D)  $90^\circ$  E)  $45^\circ$



11. Şəkildəki verilənlərə görə ( $a \parallel b$ )  $x$ -i tapın.

A)  $50^\circ$  B)  $60^\circ$  C)  $70^\circ$  D)  $45^\circ$  E)  $40^\circ$



12. Şəkildəki verilənlərə görə ( $a \parallel b$ )  $x$ -i tapın.

A)  $35^\circ$  B)  $36^\circ$  C)  $37^\circ$  D)  $38^\circ$  E)  $45^\circ$

## §5. Bucaq və saatlar. Nöqtə ətrafında dönmə.

### Nöqtə ətrafında dönmə

Saat əqrəblərinə nəzər yetirsək görərik ki, əqrəblər saatın mərkəzi ətrafında müəyyən bucaq qədər dönlürlər. Bu **dinamika** nöqtə ətrafında dönməyə aid təsəvvürlər yaradır.

*Şəkildən aydındır ki, AB şüasını A nöqtəsi ətrafında  $\alpha$  qədər döndərməklə AC-ni almaq olar.*

*Parçaların nöqtə ətrafında dönməsi də bu qayda ilə şərh edilir.*

**Dönmə zamanı başlanğıc vəziyyətin qeyd olunması vacibdir.**

**Dönmə zamanı fiqurun neçə dərəcə dönməsi başlanğıc vəziyyətdən hesablanır.**

**Dönmə hər iki istiqamətdə aparıla bilər: saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində və əksinə.**

### Saat və bucaqlar

Hamımıza məlumdur ki, saatın çevrəsi (sferblatı) 60 bərabər hissəyə bölünmüşdür ki, hər ən kiçik aralıq  $360^\circ : 60 = 6^\circ$ .

**Deməli, dəqiqə əqrəbi 1 dəqiqədə mərkəz ətrafında  $6^\circ$  dönlür.**

**1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 ədədlərinin arası beş bölgüdən ibarət olduğu üçün saat əqrəbi 1 saatda  $30^\circ$  dönlür, 1 dəqiqədə isə  $30^\circ : 60 = 0,5^\circ$  dönlür.**

Beləliklə, saat və dəqiqə əqrəbləri arasındakı bucaq saat  $9^{00}$ -da  $90^\circ$ -dir;  $7^{00}$ -da  $150^\circ$ -dir və s.

☉ Parça özünün bir ucu ətrafında ... döndükdə tam bucaq çıxır ;

☉ Parça özünün bir ucu ətrafında ... döndükdə açıq bucaq çıxır ;

**1) Saat 1-ə 24 dəqiqə işləmiş əqrəblər arasındakı  $\alpha$  bucağını hesablayın.**

**Həlli.**  $\alpha = 24 \cdot 6^\circ - 24 \cdot 0,5^\circ = 144^\circ - 12^\circ = 132^\circ$ .

**2) İndi saat  $13^{00}$ -dir. Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri üst-üstə düşəcəkdir?**

**Həlli.** Fərz edək ki,  $x$  dəqiqədən sonra əqrəblər üst-üstə düşəcəkdir. Onda dəqiqə əqrəbi  $6x$ , saat əqrəbi isə  $0,5x$  dərəcə dönəcək.

Buradan da alırıq ki,  $6x - 0,5x = 30^\circ \Rightarrow x = 5 \frac{5}{11}$  dəqiqə.

**3) İndi saat  $11^{00}$ -dir. Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri açıq bucaq əmələ gətirəcək?**

**Həlli.** 2-ci çalışmadakı mülahizələrə görə  $6x + (30^\circ - 0,5x) = 180^\circ \Rightarrow \Rightarrow 5,5x = 150^\circ \Rightarrow x = 27 \frac{3}{11}$ . **Cavab:**  $x = 27 \frac{3}{11}$  dəqiqə.

**Bu bölməni öyrənərkən  $360^\circ$  və daha böyük bucaqlar haqqında ilkin praktik təsəvvürlər yaranır.**

### Çalışmalar

**1) Bir sutka ərzində saat və dəqiqə əqrəbləri neçə dəfə **açıq bucaq** əmələ gətirir?**

A) 23 ; B) 12 ; C) 20 ; E) 22 ; D) 24 .

**2) Bir sutka ərzində saat və dəqiqə əqrəbləri neçə dəfə **düz bucaq** əmələ gətirir?**

A) 36 ; B) 40 ; C) 44 ; D) 42 ; E) 48

**3) Bir sutka ərzində saat və dəqiqə əqrəbləri neçə dəfə üst - üstə düşür?**

A) 11 ; B) 12 ; C) 20 ; D) 22 ; E) 24

**4) Dəqiqə əqrəbi saat əqrəbindən neçə dəfə çox sürətlə dönlür?**

A) 6 ; B) 8 ; C) 10 ; D) 12 ; E) 18

**5) Saat  $12^{00}$  -a beş dəqiqə qalmış əqrəblər arasındakı bucağı tapın.**

A)  $30^\circ$  ; B) 29 ; C)  $28,5^\circ$  ; D)  $27,5^\circ$  ; E)  $26^\circ$

**6) İndi saat  $12^{00}$ -dir. Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri perpendikulyar olacaqlar?**

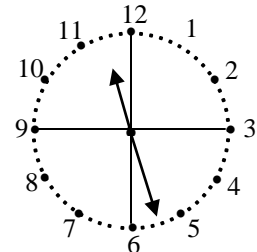
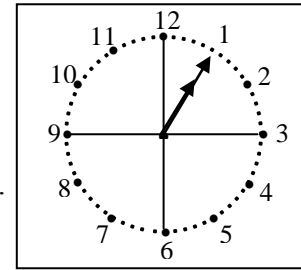
A)  $16 \frac{5}{11}$  ; B)  $15 \frac{5}{11}$  ; C)  $16 \frac{4}{11}$  ; D)  $15 \frac{2}{11}$  ; E)  $13 \frac{5}{11}$

**7) İndi saat  $12^{00}$ -dir. Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri üst-üstə düşəcəkdir?**

A)  $60 \frac{5}{11}$  ; B)  $65 \frac{5}{11}$  ; C)  $64 \frac{5}{11}$  ; D)  $66 \frac{5}{11}$  ; E)  $63 \frac{5}{11}$

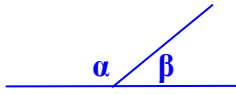
**8) İndi saat  $18^{00}$ -dir. Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri açıq bucaq əmələ gətirəcəkdir?**

A)  $63 \frac{5}{11}$  ; B)  $65 \frac{5}{11}$  ; C)  $67 \frac{5}{11}$  ; D)  $66 \frac{4}{11}$  ; E)  $63 \frac{4}{11}$





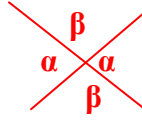
## §6. Bucaq cütləri



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

### Qonşu bucaqlar

- ☺ *Bir tərəfi ... , digər iki tərəfi ... şüalar olan bucaqlar qonşu bucaqlar adlanır.*



### Qarşılıqlı və qonşu bucaqlar

☺ ... bucaqlar bərabərdirsə, onda onların hər biri  $90^\circ$ -dir, yəni  $d/x$ -in bir nöqtəsindən yalnız bir perpendikulyar qaldırmaq olar.

☺ ... bucaqların tənbönləri arasındakı bucaq  $180^\circ$ -dir.

☺ ... bucaqların tənbönləri arasındakı bucaq  $90^\circ$ -dir.

## Düz xətt aksiomlarından çıxan nəticələr

1. İki kəsişən  $d/x$ -dən birinin **özünəparalel** yerdəyişməsi zamanı düz xətlər arasındakı **bucaq dəyişmir**;

2. **Düz xətt xaricindəki nöqtədən bu  $d/x$ -ə yalnız bir perpendikulyar  $d/x$  endirmək olar.**

3. İki paralel düz xətt 3-cü  $d/x$ -lə kəsişdikdə :

a) **daxili çarpaz bucaqlar bərabərdir** ( $\angle 1 = \angle 6, \angle 4 = \angle 5$ );

b) **uyğun birtərəfli bucaqlar bərabərdir** ( $\angle 3 = \angle 6, \angle 2 = \angle 5$ );

c) **daxili birtərəfli bucaqların cəmi  $180^\circ$**  ( $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$ );

4. **Bir düz xətt iki  $d/x$ -lə kəsişdikdə uyğun birtərəfli bucaqlar bərabərdirsə onda bu  $d/x$ -lər paraleldir.**

5. **Eyni bir düz xəttə  $\perp$  olan iki düz xətt paraleldir:**

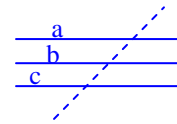
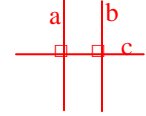
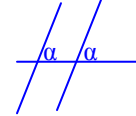
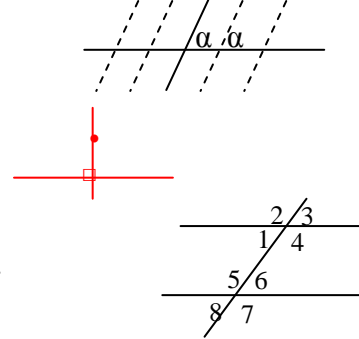
$$a \perp c, b \perp c \rightarrow a \parallel b;$$

6. **İki paralel düz xətdən birinə  $\perp$  olan  $d/x$  digərinə də  $\perp$ -dir:**

$$a \parallel b, a \perp c \rightarrow b \perp c;$$

7. **Üçüncü  $d/x$ -ə paralel olan iki düz xətt paraleldir:**

$$a \parallel c, b \parallel c \rightarrow a \parallel b;$$



## Uyğun tərəfləri paralel , perpendikulyar olan bucaqlar

Tərif: **Tərəfləri cüt-cüt paralel (perpendikulyar) olan bucaqlara uyğun tərəfləri paralel (perpendikulyar) olan bucaqlar deyilir.**

\* **Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlar ya bərabər, ya da onların cəmi  $180^\circ$ -dir.**

\* **Uyğun tərəfləri  $\perp$  olan bucaqlar ya bərabər, ya da onların cəmi  $180^\circ$ -dir.**

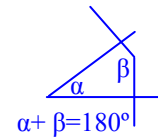
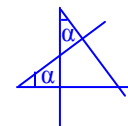
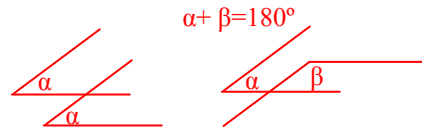
Bu xassələrin isbatı uyğun şəkillərdən **aydındır.**

### Çalışma

Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan iki bucağın fərqi  $30^\circ$ -dir.

Böyük bucaq neçə dərəcədir?

**Həlli.** Həmin bucaqları  $\alpha$  və  $\beta$  ilə işarə edək. Şərtə görə  $\alpha - \beta = 30^\circ$ , digər tərəfdən  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplamaqla  $\alpha = 105^\circ$  alırıq. Buradan da  $\beta = 75^\circ$ . Cavab:  **$105^\circ$**

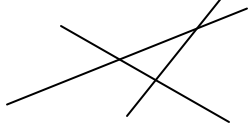


☺ **Uyğun tərəfləri paralel ( $\perp$ ) olan bucaqlara aid başqa şəkillər də çəkmə bilərsinizmi ?**

## §7. Bucaq cütlərinə aid çalışmaları

1. Şəkilə neçə cüt qonşu bucaqlar var?

A)15 B)12 C)20 D)24 E) 16



2. Şəkilə neçə cüt qarşılıqlı bucaqlar var?

A)3 B)4 C)5 D)6 E)8

3. Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlardan biri digərindən beş dəfə böyükdür. Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dərəcə çoxdur?

A)120° B)150° C)90° D) 110° E)30°

4. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərindən 20 % kiçikdir. Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dəfə böyükdür?

A)1,5 B)1,25 C)2 D)2,5 E) 2,25

5. Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlardan biri digərindən dörd dəfə kiçikdir. Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dərəcə çoxdur?

A) 90° B) 80° C)108° D) 36° E) 144°

6. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərindən 30° kiçikdir. Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dəfə böyükdür?

A)1,4 B)1,2 C)1,5 D)2 E) 2,1

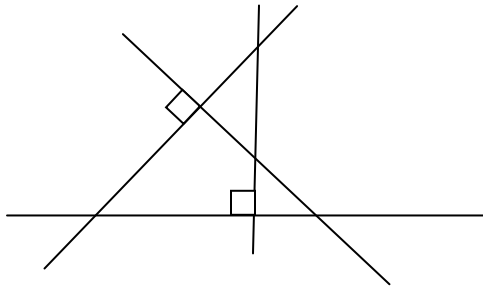
7. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərindən 50% çoxdur. Kiçik bucaq böyük bucaqdan neçə dəfə kiçikdir?

A)1,5 B)1,2 C)2,5 D)2 E) 2,2

8. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərinin 25% -nə bərabərdir. Bucaqların fərqi tapın.

A) 90° B) 80° C)108° D) 36° E) 144°

9. Şəkilə uyğun tərəfləri  $\perp$  olan neçə bucaq cütləri var?



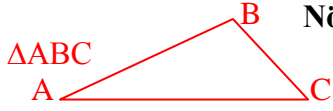
10. Şəkilə neçə iti, düz və kor bucaq var?

A)3,4,3 B)6,8,4 C)6,8,8 D)6,4,8 E) 8,8,8

11. Hansı mülahizələr doğrudur ?

1. Qonşu bucaqların tən bölənləri perpendikulyardır.
  2. Qonşu bucaqların tən bölənləri paralel ola bilər.
  3. Qonşu bucaqların uyğun tərəfləri  $\perp$  ola bilər.
  4. Qarşılıqlı bucaqların tən bölənləri arasındakı bucaq  $0^\circ$ -dir.
  5. Qarşılıqlı bucaqların tən bölənləri arasındakı bucaq  $180^\circ$ -dir.
  6. Qarşılıqlı bucaqların tən bölənləri arasındakı bucaq  $90^\circ$  ola bilər.
- A)1,3,4 B)1,3,6 C) 1,3,5 D)4,5,6 E) 3,5,6

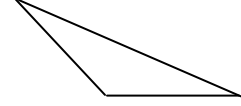
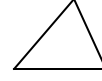
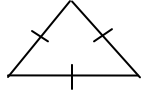
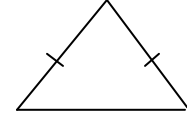
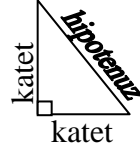
## §8. Üçbucağın tərifı , elementləri , növləri.



**Növləri:** *itibucaqlı, düzbucaqlı, korbucaqlı , bərabəryanlı, bərabərtərəfli  $\Delta$ .*

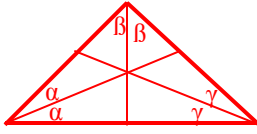
**Tərif:** *Bir d/x üzərində olmayan üç nöqtənin cüt-cüt birləşdirilməsindən alınan müstəvi fiquruna üçbucaq ( $\Delta$ ) deyilir.*

**Elementləri:** *3 bucaq , 3 tərəf , 3 tənbölən, 3 hündürlük , 3 median , sahə , perimetr*

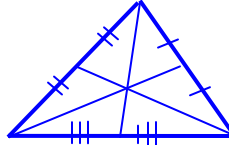


Itibucaqlı  $\Delta$

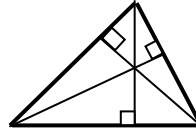
korbucaqlı  $\Delta$



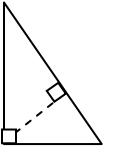
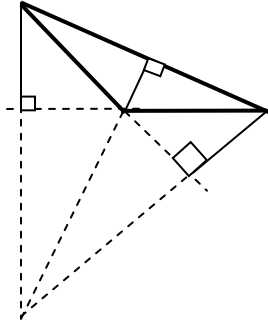
*Tənbönlər*



*Medianlar*



*Hündürlüklər*



*Təpə ilə qarşı tərəfi birləşdirən və təpədəki bucağı yarı bölən d/x parçasına tənbölən deyilir.*

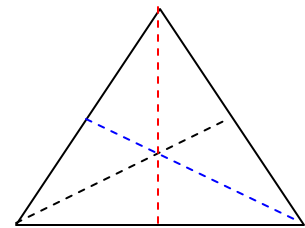
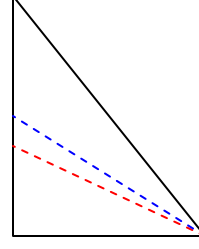
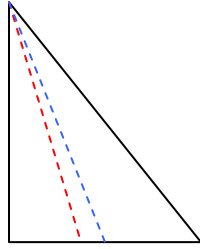
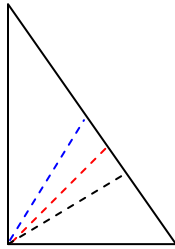
*Təpə ilə qarşı tərəfin ortasını birləşdirən d/x parçasına median deyilir.*

*Təpədən qarşı tərəfə və ya onun uzantısına endirilən perpendikulyara hündürlük deyilir.*

### *Təpə bilərsinizmi?*

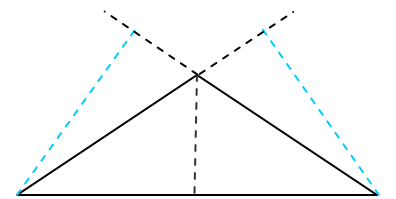
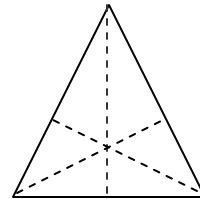
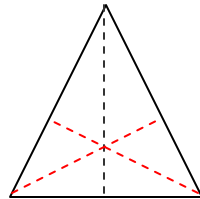
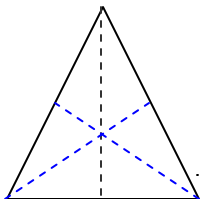
1. Bir bucağı ... bucaq olan üçbucağa ... üçbucaq deyilir.
2. Hər bir bucağı ... olan üçbucağa ... üçbucaq deyilir.
3. Üçbucağın yalnız bir ... bucağı ola bilər.
4. Düz bucaq qarşısındakı tərəfə ... deyilir.
5. Düz bucağa bitişik tərəflərə ... deyilir.
6. İki tərəfi bərabər olan üçbucağa ... üçbucaq deyilir.
7. Yan tərəflər arasındakı bucağa ... deyilir.
8. Təpə bucağı qarşısındakı tərəfə ... deyilir.
9. Bərabəryanlı ...  $\Delta$ -ın katetləri bərabərdir.
10. Üç tərəfi bərabər olan  $\Delta$ -a ... deyilir.
11. ... üçbucağın hər bir bucağı ... dərəcədir.
12. ...  $\Delta$ -ın hündürlükləri təpədə kəsişir.

\*\*\*\*\*



Düzbucaqlı üçbucaqlar

Bərabərtərəfli üçbucaq



Bərabəryanlı üçbucaqlar.

Üçbucağın müxtəlif növlərindəki *tənbölən* , *median* və *hündürlükləri* göstərin!

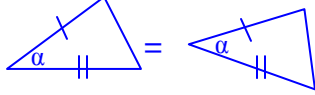
## §9. Üçbucaqların bərabərlik əlamətləri. Fales teoremi. Orta xətt

**Tərif:** Uyğun tərəf və uyğun bucaqları bərabər olan, yəni üst-üstə salına bilən üçbucaqlara bərabər  $\Delta$ -lar deyilir.

### Birinci əlamət (TBT)

*Bir üçbucağın iki tərəfi və bunlar arasındakı bucaq, uyğun olaraq digər üçbucağın iki tərəfi və onlar arasındakı bucağa bərabədirsə, onda bu üçbucaqlar bərabərdir.*

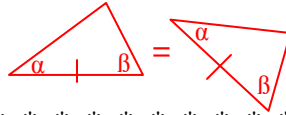
**İsbati.** Şəkilə nəzər yetirsək soldakı üçbucağı *özünəparalel yerdəyişmə* və *nöqtə ətrafında dönmə* ilə sağdakı üçbucaqla üst-üstə salmaq olar, yəni bu üçbucaqlar bərabərdir.



### İkinci əlamət (BTB)

*Bir üçbucağın bir tərəfi və buna bitişik iki bucağı, uyğun olaraq digər üçbucağın bir tərəfi və ona bitişik iki bucağına bərabədirsə, onda bu üçbucaqlar bərabərdir.*

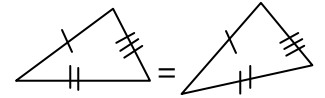
**İsbati.** Şəkilə nəzər yetirsək sol və sağdakı üçbucaqların bərabər tərəflərini *özünəparalel yerdəyişmə* və *nöqtə ətrafında dönmə* ilə üst-üstə salmaq olar. Bu tərəflərə bitişik bucaqlar da bərabər olduğundan digər tərəflər də üst-üstə düşəcəkdir.



### Üçüncü əlamət (TTT)

*Bir üçbucağın üç tərəfi, uyğun olaraq digər üçbucağın üç tərəfinə bərabədirsə, onda bu üçbucaqlar bərabərdir.*

Bu əlamətin isbatı da 1-ci və 2-ci əlamətlərdəki mülahizələrlə həyata keçirilir.

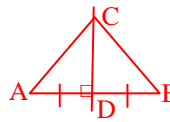


\*\*\*\*\*

**Teorem 1.** *Parçanın orta perpendikulyarı üzərindəki ixtiyari nöqtə (C) bu parçanın uclarından bərabər məsafədədir:*

$$AC = BC$$

**İsbati.** 1-ci əlamətə görə  $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow AC = BC$ .

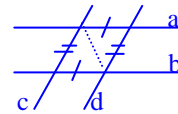


**Tərif:** *Parçanın orta nöqtəsindən qaldırılan perpendikulyara bu parçanın orta perpendikulyarı deyilir.*

Düz xətt boyunca qatladıqda fiqurun **d/x-dən müxtəlif tərəflərdə** qalan hissələri üst-üstə düşərsə belə d/x-ə fiqurun **simmetriya oxu** deyilir. Məsələn, parçanın orta perpendikulyarı bu parçanın simmetriya oxudur; d/x-in ixtiyari nöqtəsindən çəkilən perpendikulyar bu d/x-in simmetriya oxudur və s.

**Teorem 2.** *İki paralel d/x-in digər paralel d/x-lər arasında qalan parçaları bərabərdir ( $a \parallel b, c \parallel d$ ).*

**İsbati.** 2-ci əlamətə görə paralel d/x-lərin kəsişməsindəki üçbucaqlar bərabərdir. Buradan da nəticədəki parçaların bərabərliyi alınır.



**Teorem (Fales).** *Bucağın bir tərəfi üzərindəki bərabər parçaların uclarından çəkilmiş paralel d/x-lər digər tərəf üzərində də bərabər parçaları ayırır.*



Bu teoremin isbatı 1-ci əlamətdən alınır.

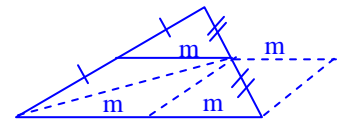
\*\*\*\*\*

**Tərif:** *Üçbucağın iki tərəfinin orta nöqtəsini birləşdirən d/x parçasına orta xətt deyilir.*

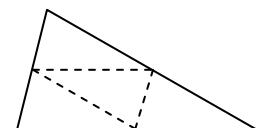
Üçbucağın üç orta xətti vardır.

**Teorem.** *Üçbucağın orta xətti 3-cü tərəfə paralel olub uzunluğu paralel olduğu tərəfin yarısına bərabərdir.*

Bu xassənin isbatı şəkilə göstəriləndiyi kimi  $\Delta$ -ların bərabərlik əlamətlərindən alınır (sol yan tərəfə paralellər çəkilmişdir).



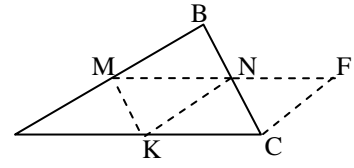
**Nəticə.** *Üçbucağın üç orta xətti bu üçbucağı dörd bərabər üçbucaqlara ayırır.*



## § 10.Çalışmalar

1. M,N,K tərəflərin orta nöqtələri,  $NF = KC$ ,  $KN = FC$  olduğunu bilərək, şəkildəki bərabər üçbucaqların sayını tapın.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

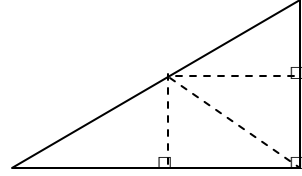


2. Çalışma 1-dəki şərtlərə görə şəkildə MN parçasına bərabər neçə parça var?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

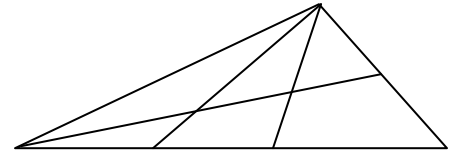
3. Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuzun orta nöqtəsindən katetlərə perpendikulyarlar endirilmişdir. Şəkildə neçə bərabər üçbucaqlar cütü var?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



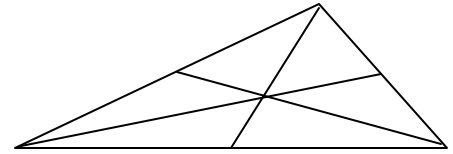
4. Şəkildə neçə üçbucaq var?

- A) 6 B) 12 C) 15 D) 16 E) 17



5. Medianların üçü də çəkildikdə şəkildə neçə üçbucaq əmələ gəlir?

- A) 6 B) 8 C) 15 D) 16 E) 17



6. İxtiyari  $\Delta$ -ın medianlarının üçü də çəkildikdə şəkildə neçə cüt bərabər üçbucaqlar əmələ gəlir?

- A) 6 B) 4 C) 3 D) 8 E) belə  $\Delta$ -lar yoxdur

7. Hansi təklif doğru deyil?

1. İxtiyari  $\Delta$ -ın iki tərəfinin orta perpendikulyarının kəsişmə nöqtəsi bu  $\Delta$ -ın təpələrindən bərabər məsafədədir;
2. İxtiyari  $\Delta$ -ın iki bucağının tən bölənlərinin kəsişmə nöqtəsi bu  $\Delta$ -ın təpələrindən bərabər məsafədədir;
3. İxtiyari  $\Delta$ -ın iki bucağının tən bölənlərinin kəsişmə nöqtəsi bu  $\Delta$ -ın tərəflərindən bərabər məsafədədir;
4. İxtiyari  $\Delta$ -ın iki tərəfinin orta perpendikulyarının kəsişmə nöqtəsi bu  $\Delta$ -ın tərəflərindən bərabər məsafədədir;

- A) 1 və 2 B) 2 və 4 C) 3 D) 2 və 4 E) hamısı

8. Üçbucağın yalnız iki medianı bərabər olduqda hansı *hökm* doğrudur?

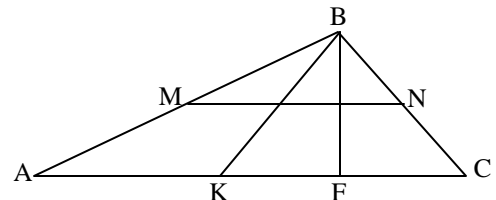
1. Bu üçbucaq bərabəryanlıdır;
2. Bu üçbucaq bərabətərəflidir;
3. Bu üçbucaq düzbucaqlı  $\Delta$ -dır;
4. Bu üçbucaq ixtiyari üçbucaq ola bilər

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) hamısı

9. MN orta xətt, BK və BF ixtiyari parçalardır.

Şəkildə neçə cüt bərabər parçalar var?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



10. Üçbucağın iki tərəfi 16 sm, 11 sm-dir. Bu tərəflərin ortasını birləşdirən parçanın ən böyük tam qiyməti neçə sm-dir?

- A) 16 B) 12 C) 13 D) 13,5 E) 13

11. Üçbucağın yan tərəflərinin hər biri oturacaqdan 6 sm böyükdür. Yan tərəfləri birləşdirən orta xətt 5 sm-dir. Üçbucağın perimetrini tapın.

- A) 36 B) 40 C) 42 D) 45 E) 43

## § 11. Parçanın (mailin) düz xətt üzərindəki proyeksiyası

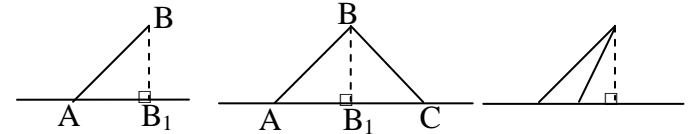
### Parça və düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətləri



Nöqtədən (B)  $d/x$ -ə endirilmiş perpendikulyarın **oturacağına** ( $B_1$ ) nöqtənin  $d/x$  üzərindəki **proyeksiyası** deyilir.

**Tərif:** Bir ucu (A)  $d/x$  üzərində olan və bu  $d/x$ -ə perpendikulyar **olmayan** parçaya (AB) **mail** deyilir.

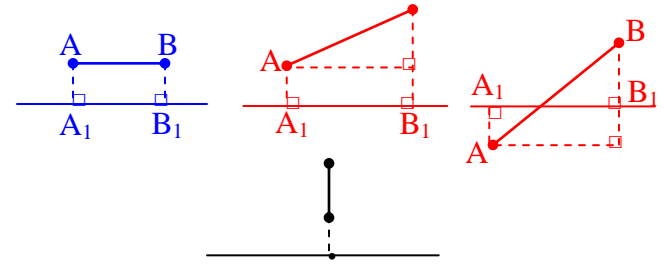
Mailin  $d/x$  üzərindəki **ucuna** (A, C) mailin **oturacağı** deyilir.



Şəkildə AB mail,  $AB_1$  isə onun  $d/x$  üzərindəki proyeksiyasıdır. Aydın ki, *bərabər* maillərin proyeksiyaları da *bərabərdir*. Bir nöqtədən çəkilmiş iki maildən böyüyünün proyeksiyası *böyük*, kiçiyinin proyeksiyası *kiçikdir*.

**Parçanın proyeksiyası** onun hər bir nöqtəsinin  $d/x$  üzərindəki proyeksiyaları çoxluğudur.

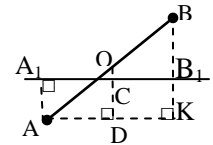
AB parçanın  $d/x$  üzərindəki **proyeksiyası** ( $A_1 B_1$ ) şəkillərdə təsvir edilmişdir.



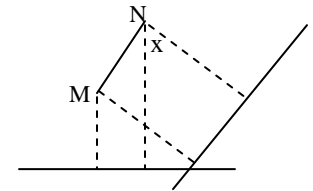
- ☺ ... **parçanın proyeksiyası özündən kiçikdir;**
- ☺ ... **parçanın proyeksiyası özünə bərabərdir;**
- ☺ ... **parçanın proyeksiyası nöqtədir.**

**Çalışma 1.** Düz xətti kəsən parçanın ucları bu  $d/x$ -dən 20 sm və 30 sm məsafədədir. Parçanın orta nöqtəsi  $d/x$ -dən hansı məsafədədir.

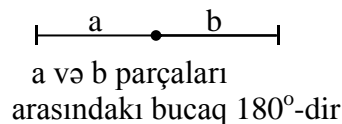
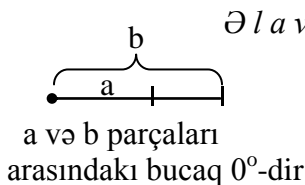
**Həlli.** Şərtə görə  $AA_1 = 20$  sm,  $BB_1 = 30$  sm-dir. AB parçasının orta nöqtəsini O ilə işarə edək. A nöqtəsindən  $BB_1$ -in uzantısına AK perpendikulyarını endirək. Onda  $OD = BK : 2 = (20 + 30) : 2 = 25 \Rightarrow OC = 25 - 20 = 5$  (sm).



**Çalışma 2.** Şəkildə M və N nöqtələrindən verilmiş düz xətlərə perpendikulyarlar endirilmişdi. Bu düz xətlər arasındakı bucağın  $40^\circ$  olduğunu bilərək  $x$ -i tapın.



- A)  $30^\circ$  ; B)  $40^\circ$  ; C)  $30^\circ$  ; D)  $50^\circ$  ; E)  $50^\circ$

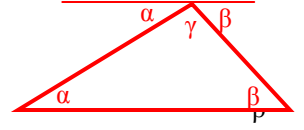


## §12. Üçbucağın öz xassələri

Burada istənilən üçbucağa aid xassələr sadalanır.

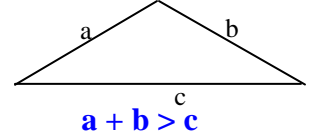
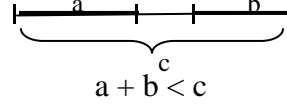
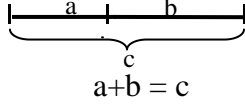
### 1. İstənilən $\Delta$ -in daxili bucaqlarının cəmi $180^\circ$ -dir.

Bu xassənin isbatı şəkildən aydın görünür:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .



### 2. Üçbucaqda istənilən bir tərəfin uzunluğu digər iki tərəfin cəmindən kiçikdir.

Bu xassənin isbatı şəkillərdən aydındır:



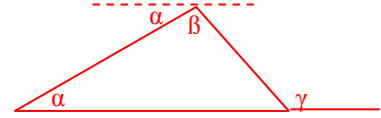
Bu halda  $\Delta$  əmələ gəlmir; bu halda da  $\Delta$  əmələ gəlmir; **bu halda  $\Delta$  əmələ gəlir**;  
Tərəfləri  $a, b, c$  olan üçbucaq üçün  $a + c > b, c + b > a$  münasibətləri eyni qayda ilə isbat olunur.  
Bu bərabərsizliklərdən alırıq:  $a > c - b; b > a - c, c > a - b$ .

Nəticə. Tərəfləri  $a, b, c$  olan üçbucaq üçün:  $|b - c| < a < b + c$   
 $|a - c| < b < a + c$

☺ Sonuncu bərabərsizlikləri sözlə ifadə edin.  $|a - b| < c < a + b$

### 3. Üçbucağın xarici bucağı ona qonşu olmayan daxili bucaqların cəminə bərabərdir: $\gamma = \alpha + \beta$

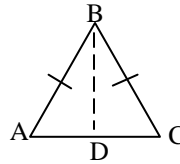
Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.



### 4. Üçbucaqda bərabər tərəflər qarşısında bərabər bucaqlar durur.

**İsbatı.** Tutaq ki,  $AB = BC$ . Göstərək ki,  $\angle A = \angle C$ .  
BD medianını çəkək. Onda üçbucaqların bərabərliyinin 3-cü əlamətinə görə

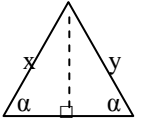
$$\Delta ABD = \Delta BDC \Rightarrow \angle A = \angle C.$$



### Tərs mülahizə. Üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşısında bərabər tərəflər durur.

**İsbatı.** Tutaq ki, üçbucağın iki bucağı bərabərdir. Göstərək ki,  $x = y$ . Tərəpdən hündürlük endirək. Onda üçbucaqların bərabərliyinin 2-ci əlamətinə görə şəkildəki kiçik  $\Delta$ -lar bərabərdir. Buradan alırıq ki,

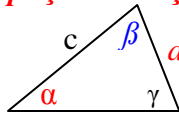
$$x = y.$$



### 5. Üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq, kiçik tərəf qarşısında kiçik bucaq durur.

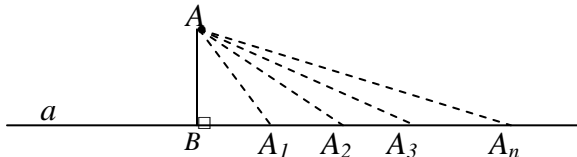
Tərs mülahizə də doğrudur:

**Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf, kiçik bucaq qarşısında kiçik tərəf durur.**



$$a < b < c \iff \alpha < \beta < \gamma$$

**Qeyd.** Aşağıdakı şəkildən aydındır ki,  $a$   $d/x$  üzərindəki nöqtələr  $B$ -dən uzaqlaşdıqca  $AA_1, AA_2, AA_3, \dots, AA_n$  mailləri böyüyür,  $d/x$ -lə maillər arasındakı bucaqlar isə kiçilir. Aydındır ki,  $A$  nöqtəsilə  $a$   $d/x$ -ni birləşdirən parçaların ən qısa  $AB$  perpendikulyardır.



### 5-ci xassənin isbatı. BD hündürlüyünü çəkək. $AD = KD$

şerti ilə  $K$  nöqtəsini qeyd

edək. 4-cü xassəyə əsasən

$AB = BK, \angle A = \angle AKB$ .

$\angle AKB$  xarici bucaq olduğu üçün  $\angle A > \angle C$ ,

şəkildən aydındır ki,  $BC > BK = AB$ . Beləliklə,

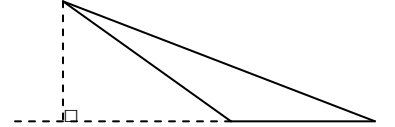
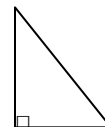
$AC$  oturacağına bitişik  $A$  və  $C$  bucaqları

üçün düz və tərs mülahizə isbat olundu.

Oturacağına bitişik bucaqlardan biri düz və ya

kor bucaq olduqda 5-ci xassənin isbatı

aşağıdakı şəkillərdən alınır.



### §13. Çalışmalar

1. Üçbucağın bucaqları 1, 2, 3 ədədləri ilə mütənəsbdir.

Böyük bucağa qonşu olan bucağı tapın.

A)  $90^\circ$  B)  $120^\circ$  C)  $50^\circ$  D)  $60^\circ$  E)  $110^\circ$

2. Üçbucağın bucaqlarının nisbəti 2 : 3 : 4 şəklindədir.

Kiçik bucaq tərəsindəki xarici bucağı tapın.

A)  $90^\circ$  B)  $120^\circ$  C)  $140^\circ$  D)  $160^\circ$  E)  $110^\circ$

3. Aşağıdakı mülahizələrdən neçəsi doğru deyil?

1. Üçbucağın tərəfləri 1, 2, 3 ədədləri ilə mütənəsb ola bilər;

2. Üçbucağın tərəfləri 2, 3, 4 ədədləri ilə mütənəsb ola bilər;

3. Üçbucağın tərəfləri 4, 5, 6 ədədləri ilə mütənəsb ola bilməz;

4. Üçbucağın tərəfləri 5, 6, 7 ədədləri ilə mütənəsb ola bilər;

5. Üçbucağın tərəfləri 3, 4, 5 ədədləri ilə mütənəsb ola bilməz. A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5

4. Üçbucağın iki tərəfi 2 : 3 nisbətində, üçüncü tərəf

bu iki tərəfin cəmindən 5 sm kiçikdir. Perimetrin 35 sm

olduğunu bilərək böyük tərəfi tapın.

A) 8 sm; B) 12 sm; C) 15 sm; D) 16 sm; E) 10 sm

5. Üçbucağın tərəfləri 2 : 3 : 3 nisbətində, böyük

tərəflərin cəmi 24 sm-dir. Kiçik tərəfi tapın.

A) 6 sm; B) 8 sm; C) 10 sm; D) 12 sm; E) 9 sm

6. Üçbucağın tərəfləri 2 : 3 : x nisbətindədir. x-in ən

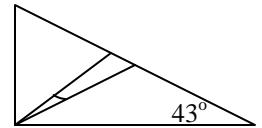
böyük və ən kiçik tam qiymətləri cəmini tapın.

A) 6; B) 8; C) 9; D) 10; E) 12

7. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri  $43^\circ$ -dir.

Düz bucaq tərəsindən çəkilmiş median və tən bölən  
arasındaki bucağı tapın.

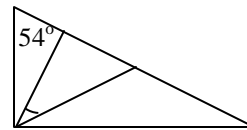
A)  $2^\circ$  B)  $4^\circ$  C)  $5^\circ$  D)  $3^\circ$  E)  $6^\circ$



8. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri  $54^\circ$ -dir.

Düz bucaq tərəsindən çəkilmiş median və hündürlük  
arasındaki bucağı tapın.

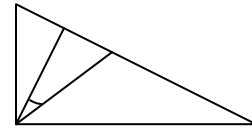
A)  $12^\circ$  B)  $14^\circ$  C)  $16^\circ$  D)  $18^\circ$  E)  $15^\circ$



9. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri  $40^\circ$ -dir.

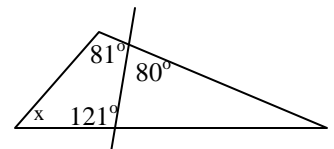
Düz bucaq tərəsindən çəkilmiş hündürlük və tən bölən  
arasındaki bucağı tapın.

A)  $1^\circ$  B)  $2^\circ$  C)  $3^\circ$  D)  $4^\circ$  E)  $5^\circ$



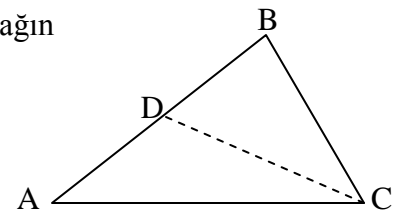
10. Şəkilə əsasən x bucağını tapın.

A)  $41^\circ$  B)  $52^\circ$  C)  $57^\circ$  D)  $58^\circ$  E)  $59^\circ$



11. Bərabəryanlı ABC üçbucağının ( $AB = AC$ ) CD medianı bu üçbucağın  
perimetrini yarıya bölür. Təpə bucağı neçə dərəcədir?

A)  $30^\circ$  B)  $45^\circ$  C)  $60^\circ$  D)  $18^\circ$  E)  $20^\circ$





## §14. Çevrə və dairə

Tərif: *Eyni bir nöqtədən bərabər məsafədə olan nöqtələr çoxluğuna çevrə deyilir. Həmin nöqtəyə çevrənin mərkəzi, mərkəzlə çevrəni birləşdirən parçaya radius (r) deyilir.*

Çevrənin iki nöqtəsini birləşdirən parçaya vətər, mərkəzdən keçən vətərə diametr (d) deyilir:  $d = 2r$

Çevrə ilə məhdud edilmiş müstəvi fiquruna dairə deyilir. Dairənin hissələri: sektor, seqment.

Çevrə ilə yalnız bir ortaq nöqtəyə malik olan d/x-ə toxunan deyilir.

Çevrənin iki nöqtəsi arasında qalan hissəsinə qövs deyilir.

Çevrənin uzunluğu:  $\ell = 2\pi r$ ; ( $\pi \approx 3,14$ )

Dairənin sahəsi:  $S = \pi r^2$

Xassə 1. *Toxunma nöqtəsindən çəkilmiş radius toxunana perpendikulyardır.*

Bu xassənin isbatı aydındır, çünki nöqtədən d/x-ə qədər ən qısa məsafə həmin nöqtədən bu d/x-ə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu olduğu üçün mərkəzdən toxunana endirilən perpendikulyar radiusla üst - üstə düşür.

Xassə 2. *Eyni bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanlar bərabərdir. Bu nöqtəni mərkəzlə birləşdirən d/x parçası toxunanlar arasındakı bucağın tən bölməsidir.*

**İsbatı.** Şəkildəki düzbucaqlı üçbucaqların ortaq hipotenuzları və iki katetləri (radiuslar) bərabər olduğundan bu üçbucaqlar bərabərdir. Buradan da xassənin doğruluğu alınır.

Tərif: *Söykəndiyi qövsün uzunluğu radiusa bərabər olan mərkəzi bucağın qiyməti bir radian qəbul edilir.*

$\alpha$  mərkəzi bucağının radianla qiyməti

$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

düsturu ilə ölçülür, burada  $\ell$  – uyğun qövsün uzunluğu,  $r$  - çevrənin radiusudur.

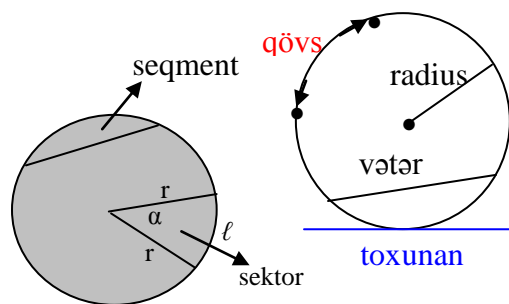
**Nəticə.** Tam bucaq =  $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$  rad. ,

açıq bucaq =  $\pi$  rad., düz bucaq =  $\frac{\pi}{2}$  rad.

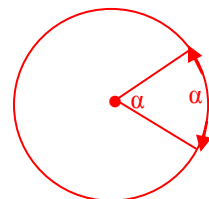
**Sektor və seqmentin sahələri**

$\alpha$  – radianla ölçüldükdə

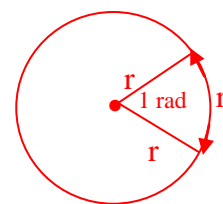
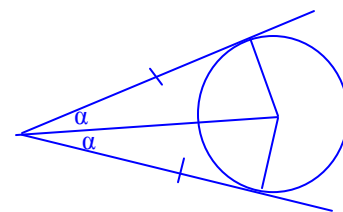
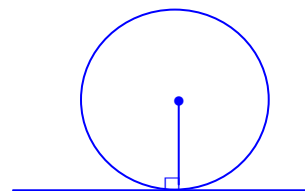
$$S_{sek} = \ell r : 2 = \alpha r^2 : 2, S_{seq} = (\alpha - \sin \alpha) r^2 : 2.$$



Təpəsi çevrənin mərkəzində, tərəfləri radiuslar olan bucağa mərkəzi bucaq deyilir.



Mərkəzi bucağın qiyməti söykəndiyi qövslə ölçülür.



$$\odot \quad 180^\circ = \pi$$

$$90^\circ = \dots ; \quad 60^\circ = \dots ;$$

$$45^\circ = \dots ; \quad 30^\circ = \dots ;$$

$$18^\circ = \dots ; \quad 15^\circ = \dots$$

$$22,5^\circ = \dots ; \quad 7,5^\circ = \dots ;$$

$$1^\circ = \dots ;$$

$$1 \text{ rad} = \dots$$

## §15. Çalışmalar

1. Radiusu 9 sm olan çevrənin  $50^\circ$ -li mərkəzi bucağın qövsünün uzunluğunu tapın.

2. Sahəsi  $6\pi \text{ sm}^2$  olan dairənin  $20^\circ$ -li mərkəzi bucağına uyğun qövsün uzunluğunu tapın.

3. Uzunluğu  $12\pi$  sm olan çevrənin 4 sm-lik qövsünə uyğun mərkəzi bucağı neçə dərəcədir?

4. Diametri 6 sm olan çevrənin  $45^\circ$ -li mərkəzi bucağına uyğun seqmentin sahəsini tapın.

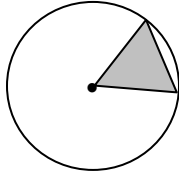
5. Radiusu 18 sm olan çevrənin  $72^\circ$ -li qövsünün uzunluğunu tapın.

6. Diametri 16 sm olan dairədə  $60^\circ$ -li qövsə uyğun seqmentin sahəsini tapın.

7. Sahəsi  $6\pi \text{ sm}^2$  olan seqmentin qövsü  $30^\circ$ -dir. Bu qövsə söykənən sektorun sahəsini tapın.

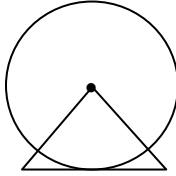
8. Sahəsi  $4\pi \text{ sm}^2$  olan sektorun qövsü  $45^\circ$ -dir. Bu qövsə söykənən seqmentin sahəsini tapın.

9. Sahəsi  $12\pi \text{ sm}^2$  olan sektorun qövsü  $36^\circ$ -dir. Bu qövsə uyğun üçbucağın sahəsini tapın.



10. Diametri 6 sm olan dairənin  $20^\circ$ -li mərkəzi bucağına uyğun sektorun sahəsini tapın.

11. Radiusu 10 sm olan çevrənin mərkəzi bərabəryanlı üçbucağın təpə nöqtəsində olub oturacağa toxunur. Üçbucaq daxilindəki qövsün uzunluğu  $5\pi$  sm-dir. Üçbucağın sahəsini tapın.



12. Radiusu 15 sm olan çevrənin  $10^\circ$ -li mərkəzi bucağın qövsünün uzunluğunu tapın.

13. Diametri 8 sm olan çevrənin  $3\pi$  sm-lik qövsü neçə dərəcədir?

14. Uzunluğu  $2\pi$  sm olan çevrə qövsü  $24^\circ$ -dir. Çevrənin radiusu neçə sm-dir?

15. Diametri 30 sm olan çevrənin  $60^\circ$ -li mərkəzi bucağına uyğun seqmentin sahəsini tapın.

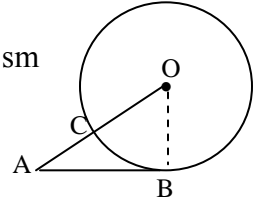
16. Radiusu 15 sm olan çevrə xaricindəki nöqtə çevrədən 10 sm məsafədədir. Bu nöqtədən çevrəyə çəkilən toxunanın uzunluğunu tapın.

17. Diametri 36 sm olan dairədə  $90^\circ$ -li qövsə uyğun seqmentin sahəsini tapın.

18. Sahəsi  $16\pi \text{ sm}^2$  olan seqmentin qövsü  $60^\circ$ -dir. Bu qövsə söykənən sektorun sahəsini tapın.

19. Sahəsi  $24\pi \text{ sm}^2$  olan sektorun qövsü  $30^\circ$ -dir. Bu qövsə söykənən seqmentin sahəsini tapın.

20. Xaricindəki nöqtədən çevrəyə toxunan çəkilmişdir.  $AC = OC = 1$  sm olduğunu bilərək, BOC sektorunun sahəsini tapın.



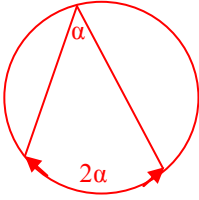
21. Diametri 16 sm olan dairənin  $24^\circ$ -li mərkəzi bucağına uyğun sektorun sahəsini tapın.

22. Sahəsi  $9\pi \text{ sm}^2$  olan sektorun qövsü  $12^\circ$ -dir. Dairənin diametrini tapın.

§16. Təpəsi çevrə üzərində, daxilində və xaricində olan bucaqlar

**Daxilə çəkilmiş bucaq.**

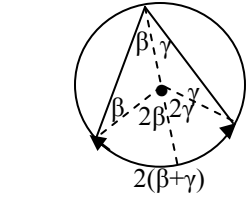
**Tərif:** *Təpəsi çevrə üzərində, tərəfləri çevrəni kəsən bucağa daxilə çəkilmiş bucaq deyilir.*



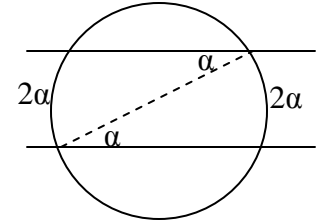
**Xassə 1.** *Daxilə çəkilmiş bucağın qiyməti söykəndiyi qövsün yarısına bərabərdir.*

**Xassə 2.** *Çevrənin iki paralel düz xətt arasında qalan hissələri bərabərdir.*

Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.

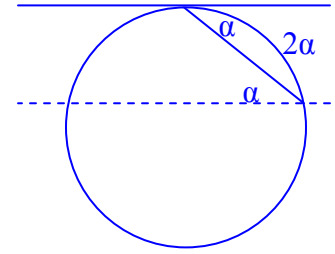


Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.  
( $\alpha = \beta + \gamma$ )



**Nəticə.** Bərabər vətərlərin gərdiyi qövslər bərabərdir.

**Xassə 3.** *Toxunma nöqtəsindən çəkilmiş vətərin toxunanla əmələ gətirdiyi bucağın qiyməti vətərin gərdiyi qövsün yarısına bərabərdir.*



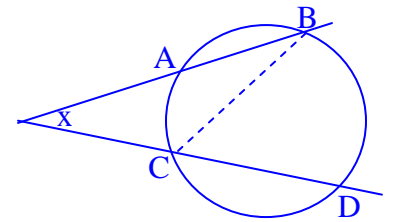
**İsbatı.** Vətərin digər ucundan toxunana paralel çəkək. Çevrənin paralel düz xətlər arasında qalan hissələri bərabər olduğundan daxilə çəkilmiş bucağın xassəsinə əsasən 2-ci xassədəki hökm doğrudur.

**Təpəsi çevrə xaricində olan bucaq**

**Xassə 3.** *Çevrə xaricindəki eyni bir nöqtədən çəkilmiş iki kəsən (iki toxunan, toxunan və kəsən) arasındakı bucaq bu bucaq daxilində qalan çevrə qövsləri fərqi yarısına bərabərdir:*

$$x = \frac{BD - AC}{2}$$

**İsbatı.** Xarici bucağın xassəsinə görə  $\beta = \alpha + x \rightarrow x = \beta - \alpha = \frac{BD}{2} - \frac{AC}{2} = \frac{BD - AC}{2}$ .



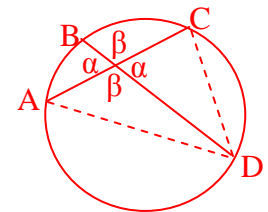
**Təpəsi çevrə daxilində olan bucaq**

**Xassə 4.** *Kəsişən iki vətər arasındakı qarşılıqlı bucaqların qiyməti bu bucaqların gərdiyi uyğun qövslərin cəminin yarısına bərabərdir:*

$$\alpha = \frac{AB + CD}{2}, \beta = \frac{BC + AD}{2}$$

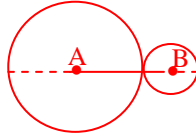
**İsbatı.**  $\alpha = \angle A + \angle BDA = \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{CD + AB}{2}$ ;

$$\beta = \angle C + \angle CDB = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}$$

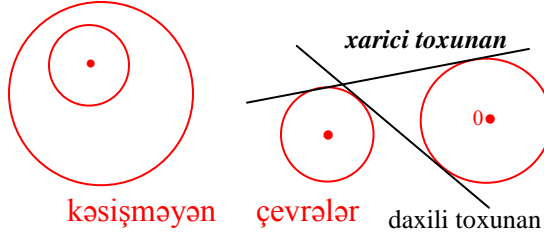
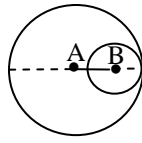


## § 17. Çevrələrin qarşılıqlı vəziyyəti

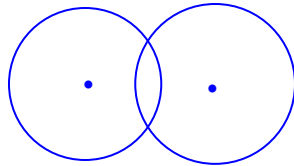
1. Çevrələrin mərkəzləri və toxunma nöqtəsi bir düz xətt üzərindədir.



2. Çevrələr xaricdən toxunduqda mərkəzlər arasındakı məsafə radiuslar cəminə ( $AB = R + r$ ), daxildən toxunduqda isə radiuslar fərqi bərabərdir ( $AB = R - r$ ).

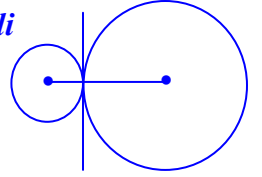


kəşilməyən çevrələr xarici toxunan daxili toxunan

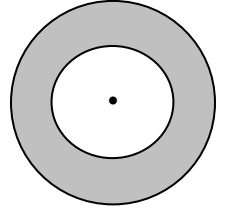


kəşişən çevrələr(dairələr)

3. Toxunan çevrələrin daxili toxunmanı mərkəzləri birləşdirən parçaya perpendikulyardır.



4. Mərkəzləri üst-üstə düşən müxtəlif radiuslu dairələrin çevrələri arasındakı hissə halqa adlanır.



☺ Halqanın qalınlığı ... .

☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar cəmindən ... olduqda çevrələr kəşişir.

☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar ... olduqda çevrələr kəşismir.

☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar ... olduqda çevrələr xaricdən toxunur.

☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar ... olduqda çevrələr daxildən toxunur.

☺ Çevrələrin mərkəzlərindən keçən  $d/x$  bu iki çevrənin əmələ gətirdiyi fiqurun ... .

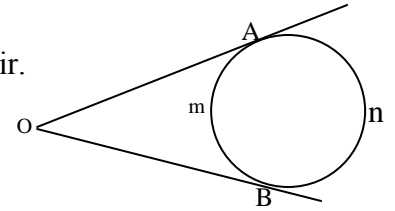
☺ ... çevrələrin ortaq ... toxunanları yoxdur.

### Çalışma nümunələri

1. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki toxunan çəkilmişdir. Toxunma nöqtələri çevrəni 2 : 3 nisbətində bölür. Toxunanlar arasındakı bucaq neçə dərəcədir?

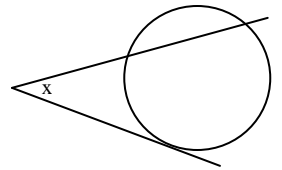
**Həlli.** Şərtə görə  $A\tilde{n}B = 3x$ ,  $A\tilde{m}B = 2x \rightarrow 3x + 2x = 360^\circ \rightarrow \rightarrow 5x = 360^\circ \rightarrow x = 72^\circ \rightarrow A\tilde{n}B = 216^\circ$ ,  $A\tilde{m}B = 144^\circ$ ;

$\angle O = \frac{A\tilde{n}B - A\tilde{m}B}{2} = 36^\circ$ . **Cavab:**  $36^\circ$



2. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə toxunan və kəsən çəkilmişdir. Çevrənin bucaq daxilindəki qövsü 55° və 135°-dir. Toxunan və kəsən arasındakı bucaq neçə dərəcədir?

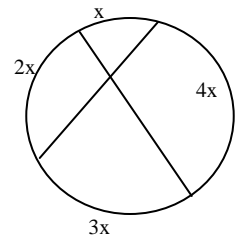
**Həlli.**  $x = \frac{135^\circ - 55^\circ}{2} = 40^\circ$ . **Cavab:**  $40^\circ$



3. Kəşişən iki vətərin uc nöqtələri çevrəni 1:2:3:4 nisbətində bölür. Vətərlər arasındakı bucaq neçə dərəcədir?

**Həlli.** Mütənəsiblik əmsalını x ilə işarə edək. Onda  $x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$ ,

$10x = 360^\circ$ ,  $x = 36^\circ$ . Vətərlər arasındakı bucaq  $\frac{x + 3x}{2} = 2x = 72^\circ$ .



4. Çevrələrinin uzunluqları  $8\pi$  sm və  $6\pi$  sm olan halqanın qalınlığını tapın.

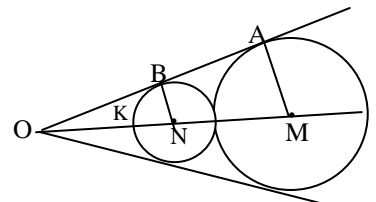
**Həlli.**  $2\pi R = 8\pi$ ;  $2\pi r = 6\pi \Rightarrow R - r = 4 - 3 = 1$ . **Cavab:** 1 sm

5. Radiusları 5 sm və 8 sm olan iki çevrənin xarici toxunanlarının kəşimə nöqtəsinin kiçik çevrəyə qədər məsafəsini tapın.

**Həlli.** OBN və OAM düzbucaqlı üçbucaqlarından ( $OK = x$ )

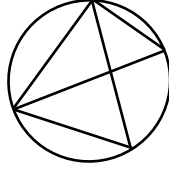
$\sin \angle AOM = \frac{BN}{ON} = \frac{AM}{OM} = \frac{5}{x+5} = \frac{8}{x+18}$  olduğu üçün

$5(x+18) = 8(x+5) \rightarrow 5x+90 = 8x+40 \rightarrow 3x = 50 \rightarrow x = 16\frac{2}{3}$ .

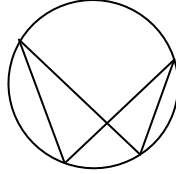


## §18. Çalışmalar

1. Şəkilə açıq bucaqdan fərqli neçə bərabər bucaqlar cütü var?  
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

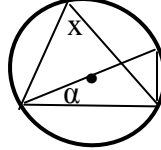


3. Şəkilə neçə daxilə çəkilmiş bucaq var?  
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



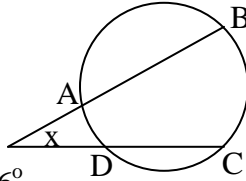
5. Şəkilə  $\alpha = 30^\circ$ ,  $x$  bucağını tapın.

A)  $80^\circ$  B)  $60^\circ$  C)  $75^\circ$  D)  $90^\circ$  E)  $45^\circ$



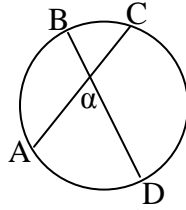
7. A, B, C, D nöqtələri çevrəni A-dan başlayaraq 4:3:2:1 nisbətində bölür.  $x$  bucağını tapın

A)  $42^\circ$  B)  $48^\circ$  C)  $24^\circ$  D)  $30^\circ$  E)  $36^\circ$



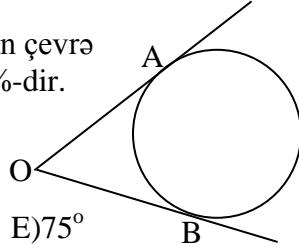
9. AB, BC, CD və AD qövsələrinin nisbəti 4 : 2 : 6 : 3 kimidir.  $\alpha$  bucağını tapın.

A)  $40^\circ$  B)  $50^\circ$  C)  $60^\circ$  D)  $70^\circ$  E)  $36^\circ$



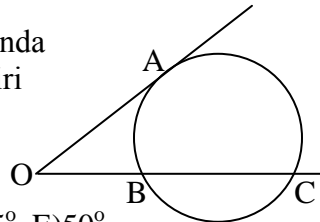
11. Toxunanlar arasında qalan çevrə qövsələrdən biri digərinin 44%-dir. O bucağını tapın.

A)  $50^\circ$  B)  $60^\circ$  C)  $70^\circ$  D)  $80^\circ$  E)  $75^\circ$



13. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövsələrinin biri digərinin 50%-dir. AB və BC qövsələri bərabərdir. O bucağını tapın.

A)  $36^\circ$  B)  $30^\circ$  C)  $40^\circ$  D)  $45^\circ$  E)  $50^\circ$



15. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövsələrdən biri digərinin  $33\frac{1}{3}\%$ -dir. Xaricdə qalan qövs isə  $40^\circ$ -dir.

Toxunan və kəsən arasındakı bucağı tapın.

A)  $90^\circ$  B)  $80^\circ$  C)  $70^\circ$  D)  $60^\circ$  E)  $50^\circ$

17. Sahəsi  $4\pi$  sm<sup>2</sup> olan dairənin çevrəsinin uzunluğu neçə sm-dir?

A)  $4\pi$  B)  $6\pi$  C)  $8\pi$  D)  $\pi$  E)  $2\pi$

2. Şəkilə neçə daxilə çəkilmiş bucaq var?  
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

4. Şəkilə açıq bucaqdan fərqli neçə bərabər bucaqlar cütü var?  
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6. Şəkilə  $\alpha = 40^\circ$ ,  $x$  bucağını tapın.

A)  $50^\circ$  B)  $60^\circ$  C)  $75^\circ$  D)  $90^\circ$  E)  $45^\circ$

8. A, B, C, D nöqtələri çevrəni A-dan başlayaraq 2:3:4:6 nisbətində bölür.  $x$  bucağını tapın

A)  $12^\circ$  B)  $24^\circ$  C)  $36^\circ$  D)  $30^\circ$  E)  $32^\circ$

10. AB, BC, CD və AD qövsələrinin nisbəti 5 : 3 : 7 : 3 kimidir.  $\alpha$  bucağını tapın.

A)  $50^\circ$  B)  $60^\circ$  C)  $70^\circ$  D)  $80^\circ$  E)  $36^\circ$

12. Toxunanlar arasında qalan çevrə qövsələrdən biri digərinin  $\frac{5}{13}$  hissəsidir. O bucağını tapın.

A)  $50^\circ$  B)  $60^\circ$  C)  $70^\circ$  D)  $80^\circ$  E)  $75^\circ$

14. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövsələrdən biri digərinin  $\frac{2}{5}$  hissəsidir. AC və BC qövsələri bərabərdir. O bucağını tapın.

A)  $32^\circ$  B)  $36^\circ$  C)  $40^\circ$  D)  $45^\circ$  E)  $50^\circ$

16. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövsələrinin biri digərinin  $\frac{3}{7}$  hissəsidir. Xaricdə qalan qövs isə  $30^\circ$ -dir. Toxunan və kəsən arasındakı bucağı tapın.

A)  $60^\circ$  B)  $66^\circ$  C)  $70^\circ$  D)  $76^\circ$  E)  $50^\circ$

18. Çevrəsinin uzunluğu  $6\pi$  sm olan dairənin sahəsi neçə sm<sup>2</sup>-dir?

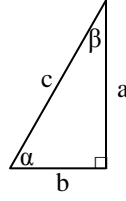
A)  $4\pi$  B)  $6\pi$  C)  $8\pi$  D)  $9\pi$  E)  $36\pi$

## § 19. Düzbucaqlı üçbucaq

Tərif: Düzbucaqlı  $\Delta$ -da:

a) iti bucaq qarşısındakı katetin hipotenuza nisbətində bu bucağın sinusunu deyilir:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \sin \beta = \frac{b}{c}.$$



b) iti bucağa bitişik katetin hipotenuza nisbətində bu bucağın kosinusunu deyilir:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \cos \beta = \frac{a}{c};$$

c) iti bucaq qarşısındakı katetin bitişik katetə nisbətində bu bucağın tangensini deyilir:

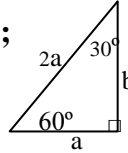
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a};$$

d) iti bucağa bitişik katetin qarşısındakı katetə nisbətində bu bucağın kotangensini deyilir:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}.$$

Çalışma nümunələri

1.  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , çünki  $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ ;  $b^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \rightarrow b = a\sqrt{3}$ .



2.  $\sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Eyni qayda ilə

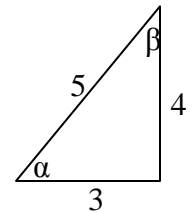
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Şəkilə verilənlərə görə iti bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.

Həlli.  $3^2 + 4^2 = 5^2$  olduğu bu üçbucaq düzbucaqlı  $\Delta$ -dır. Onda

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \sin \beta = \frac{3}{5}; \cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4};$$



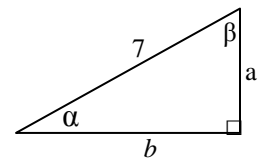
5. Hipotenuzu 7 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -da  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  olduğunu bilərək

katetləri və iti bucaqların digər triqonometrik funksiyalarını tapın.

Həlli.  $a = c \sin \alpha = 7 \sin \alpha = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ ;  $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{2}{3}$ ;

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; b = 7 \cos \alpha = \frac{7\sqrt{5}}{3};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



İti bucağın triq. funksiyalarının xassələri

1.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ; 2.  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ;

3.  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ; 4.  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ;

5.  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ,  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ ,  
 $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ .

İsbatı.

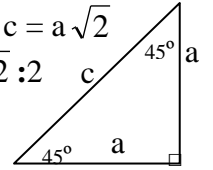
1-ci:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{c^2}{c^2} = 1$ .

2-ci 1-ci bərabərliyin hər bir həddini  $\cos^2 \alpha$ -ya bölməklə alınır.

3-cü 1-ci bərabərliyin hər bir həddini  $\sin^2 \alpha$ -ya bölməklə alınır.

4-cü və 5-ci təriflərdən alınır.

3. Şəkilə əsasən  $c^2 = 2a^2 \rightarrow c = a\sqrt{2}$   
 $\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = a:a = 1.$$

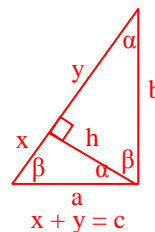
☺ ... düzbucaqlı üçbucağın katetləri bərabər, hər bir iti bucağı isə ... dərəcədir.

☺ Tərəfləri  $a$ ,  $a\sqrt{3}$ ,  $2a$  olan üçbucaq ... və onun bucaqları ... dərəcədir.

☺ Düzbucaqlı üçbucaqda  $30^\circ$ -li bucaq qarşısındakı katet hipotenuzun ... bərabərdir.

## § 20. Düzbucaqlı üçbucağın əsas xassələri

Katətləri  $a$  və  $b$ , hipotenuzu  $c$ , iti bucaqları isə uyğun olaraq  $\alpha$ ,  $\beta$  olan düzbucaqlı  $\Delta$  nəzərdən keçirək.  $a$  və  $b$  katətlərinin hipotenuz üzərindəki proyeksiyalarını uyğun olaraq  $x$  və  $y$  ilə işarə edək. Onda:



1.  $a^2 + b^2 = c^2$  (Pifaqor teoremi);

2.  $h = ab/c$ ;

3.  $h^2 = xy$ ;

4.  $a^2 = xc$ ;

5.  $b^2 = yc$ .

İsbatı

$$\operatorname{tg} \alpha = h:y = x:h \rightarrow h^2 = xy$$

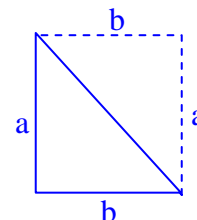
$$\sin \alpha = a:c = x:a \rightarrow a^2 = cx$$

$$\cos \alpha = b:c = y:b = h:a \rightarrow b^2 = cy, h = ab/c$$

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x+y) = c \cdot c = c^2.$$

**Teorem. Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi katətlər hasilinin yarısına bərabərdir.**

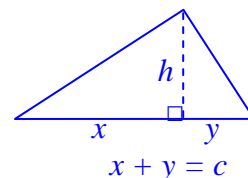
**İsbatı.** Aşağı siniflərdən artıq bilirik ki, düzbucaqlının sahəsi onun eni və uzunluğu hasilinə bərabərdir. İxtiyari düzbucaqlı üçbucaq isə tərəfləri bu  $\Delta$ -ın katətləri olan bir düzbucaqlının yarısıdır. Bu mülahizələrə əsasən düzbucaqlı



üçbucağın sahəsi katətlər hasilinin yarısına bərabərdir:  $S = \frac{ab}{2}$ .

**Nəticə1. Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi hipotenuzla bu hipotenuza endirilmiş hündürlük hasilinin yarısına bərabərdir.**

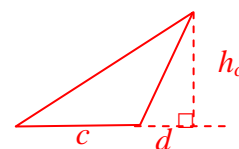
$$S = \frac{1}{2}xh + \frac{1}{2}yh = \frac{h}{2}(x+y) = \frac{1}{2}ch$$



**Nəticə2. İstənilən üçbucağın sahəsi oturacaqla bu oturacağa endirilmiş hündürlük hasilinin yarısına bərabərdir:**

$$S = 0,5ah_a = 0,5bh_b = 0,5ch_c$$

**İsbatı.** Kor bucaqlı üçbucaq üçün  $S = \frac{1}{2}(c+d)h_c - \frac{1}{2}dh_c = 0,5ch_c$ .



İtibucaqlı  $\Delta$  halında isbat 1-ci nəticədəki kimi aparılır.

Qeyd 1. İti bucaqların:

a) sinusları bərabədirsə özləri də bərabərdir:  $\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ;

b) kosinusları bərabədirsə özləri də bərabərdir:  $\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ;

c) tangensləri bərabədirsə özləri də bərabərdir:  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ;

d) kotangensləri bərabədirsə özləri də bərabərdir:  $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ .

☺ Xassələri sözlə ifadə edin

1. ... kvadratları cəmi ... kvadratına bərabərdir (...);

2. ... üçbucaqda ... bucaq təpəsindən ... çəkilmiş hündürlük ... nisbətində bərabərdir;

3. ...  $\Delta$ -da düz bucaq təpəsindən ... çəkilmiş hündürlüyün kvadratı ... bərabərdir;

4-5. Katetin kvadratı onun hipotenuz üzərindəki ... bərabərdir;

Qeyd 2. Yuxarıdakı mülahizələrin tərsi də doğrudur, yəni hər hansı bir üçbucaqda beş xassədən biri doğrudursa, onda bu üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır.



Bu qeydin isbatını özüm edərdəm !!

## § 21 Çalışmalar

1. Katetleri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın böyük iti bucağının sinusunu tapın.

- A) 0,75 B) 0,4 C) 0,5 D) 0,6 E) 0,8

3. Katetleri 5 sm və 12 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın kiçik iti bucağının kosinusunu tapın.

- A)  $\frac{5}{13}$  B)  $\frac{12}{13}$  C)  $\frac{5}{12}$  D)  $\frac{5}{17}$  E)  $\frac{12}{17}$

5. Katetleri 5 sm və 8 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın böyük iti bucağının tangensini tapın.

- A) 1,6 B) 1,5 C) 1,4 D) 1,75 E) 1,8

7. Katetleri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın böyük iti bucağının kotangensini tapın.

- A)  $1\frac{1}{3}$  B) 0,5 C) 0,6 D) 0,75 E) 0,8

9. Katetleri 6 sm və 9 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -da katetlər qarşısındakı bucaqlar uyğun olaraq  $\alpha$  və  $\beta$  olarsa  $\cos^2\alpha + \sin^2\beta$  cəmini tapın.

- A) 1 B)  $\frac{6}{13}$  C)  $\frac{9}{13}$  D)  $\frac{16}{13}$  E)  $\frac{18}{13}$

11. Katetleri 7 sm və 14 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -da kiçik bucaq  $\alpha$  olarsa,  $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$  fərqini tapın.

- A) 0,75 B) 0,4 C) 0,5 D) 0,6 E) 0,8

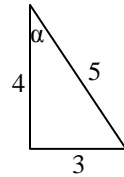
13. Bərabəryanlı ABC ( $AB = BC$ )  $\Delta$ -da  $\text{ctg} \angle B = \frac{3}{4}$ .

Oturacağa bitişik bucağın tangensini tapın.

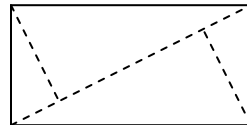
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. Şəkilə əsasən  $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\alpha$  ifadəsinin qiymətini tapın.

- A) 0,25 B) 3,6 C) 2,5 D) 0,36 E) 0,6



17. Düzbucaqlının qarşı tərəflərindən diaqonala endirilmiş perpendikulyarlar onu  $1 : 3 : 1$  nisbətində bölür. Diaqonalin 10 sm olduğunu bilərək perpendikulyarların uzunluğunu tapın.



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Katetlərdən biri 15 sm, hipotenuzu 25 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın böyük iti bucağının sin-nu tapın.

- A) 0,8 B) 0,6 C) 0,5 D) 0,75 E) 0,4

4. Katetlərdən biri 6 sm və hipotenuzu 10 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın kiçik iti bucağının cos-nu tapın.

- A) 0,8 B) 0,6 C) 0,5 D) 0,75 E) 0,4

6. Katetləri nisbəti  $4 : 5$  olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın böyük iti bucağının tangensini tapın.

- A) 0,8 B) 1,5 C) 1,25 D) 1,75 E) 1,8

8. Katetləri nisbəti  $3 : 4$  olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın iti bucaqlarının sinusları cəmini tapın.

- A) 1,6 B) 1,5 C) 1,4 D) 1,75 E) 1,8

10. Katetlərdən biri 10 sm, perimetri 60 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın iti bucaqlarının kosinusları cəmini tapın.

- A)  $1\frac{4}{13}$  B)  $1\frac{2}{13}$  C)  $1\frac{1}{13}$  D)  $1\frac{3}{13}$  E)  $1\frac{5}{13}$

12. Hipotenuzu 20 sm, perimetri 48 sm olan düzbucaqlı  $\Delta$ -ın iti bucaqlarının tangensləri cəmini tapın.

- A)  $2\frac{4}{13}$  B)  $2\frac{2}{12}$  C)  $2\frac{1}{13}$  D)  $2\frac{1}{12}$  E)  $2\frac{5}{13}$

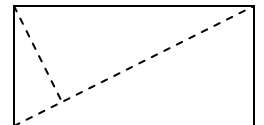
14. Bərabəryanlı ABC ( $AB = BC$ )  $\Delta$ -da  $\text{tg} \angle B = 0,75$ . Oturacağa bitişik bucağın tangensini tapın.

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

16. Şəkilə əsasən  $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha \sin^2\alpha$  ifadəsinin qiymətini tapın.

- A)  $\frac{112}{625}$  B)  $\frac{113}{625}$  C)  $\frac{114}{625}$  D)  $\frac{102}{625}$  E)  $\frac{116}{625}$

18. Düzbucaqlının tərəsindən diaqonala endirilmiş perpendikulyar onu  $1 : 4$  nisbətində bölür. Perpendikulyarın 10 sm olduğunu bilərək diaqonalin uzunluğunu tapın.



- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

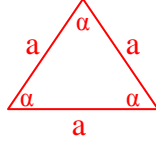


## § 22. Bərabərtərəfli və bərabəryanlı üçbucaqların xassələri

### Bərabərtərəfli üçbucaq

**Tərif:** *Bütün tərəfləri bərabər olan üçbucağa bərabərtərəfli (düzgün) üçbucaq deyilir.*

1. Hər bir bucağı  $60^\circ$ -dir;



2. Bütün tərəfləri bərabərdir;

3. Hər bir tərədən çəkilən median, tən bölən, hündürlük üst-üstə düşür və onların kəsişmə nöqtəsi bu  $\Delta$ -ın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzidir, yəni

$$R = \frac{2}{3}m, r = \frac{1}{3}m; \quad (m\text{-mediandır})$$

$$4. S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2; P = 3a;$$

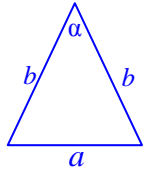
burada  $S$  -  $\Delta$ -ın sahəsi,  $P$  - perimetrdir.

5. Üç simmetriya oxu vardır.

### Bərabəryanlı üçbucaq

**Tərif:** *İki tərəfi bərabər olan üçbucağa bərabəryanlı üçbucaq deyilir.*

Bərabər tərəflər **yan tərəflər** ( $b$ ), yan tərəflər arasındakı bucaq **təpə bucağı** ( $\alpha$ ) və təpə bucağı qarşısındakı tərəf isə **oturacaq** ( $a$ ) adlanır.



Xassələri

1. Oturacağa **bitişik bucaqlar** bərabərdir;

2. Tərədən çəkilmiş hündürlük həm **median**, həm də **tən böləndir**;

3. Tərədən çəkilmiş hündürlüyü öz üzərində saxlayan  $d/x$  onun **simmetriya oxudur**;

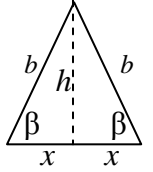
4. Yalnız bir simmetriya oxu var;

5. **Oturacaqdakı tərədən çəkilmiş:**

a) tən bölənlər bərabərdir; b) medianlar bərabərdir; c) hündürlüklər bərabərdir;

6.  $h^2 + x^2 = b^2$  ( $\odot$  ... teoreminə görə).

7.  $S = hx$ ;  $P = 2b + 2x$ ,  $x$  - oturacağın yarısıdır.



### Çalışma nümunələri

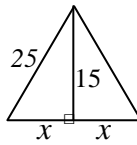
1. Bucaqları 2:4:6 nisbətində olan üçbucağın növünü təyin edin.

**Həlli.** Mütənasiblik əmsalını  $k$  ilə işarə edək. Onda  $\Delta$ -ın bucaqları  $2k$ ;  $4k$  və  $6k$  olacaqdır. Aydın ki,  $2k + 4k + 6k = 180^\circ \Rightarrow 2k = 180^\circ \Rightarrow k = 15^\circ$ . Deməli, bu  $\Delta$ -ın bucaqları  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ -dir. **Cavab:** düzbucaqlı  $\Delta$ .

2. Yan tərəfi 25 sm, hündürlüyü 15 sm olan bərabəryanlı üçbucağın oturacağını tapın.

**Həlli.** Pifaqor teoreminə görə  $x^2 = 25^2 - 15^2 = 400$ ,  $x = 20$ .

**Cavab:** 40 sm.

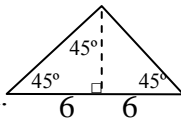


3. Oturacağı 12 sm, təpə bucağı  $90^\circ$  olan bərabəryanlı  $\Delta$ -ın oturacağa çəkilmiş hündürlüyünü tapın.

Şəkildən aydındır ki,  $h = 6$  sm.

4. Düzbucaqlı  $\Delta$ -ın iti bucaqlar nisbəti 4:6 kimidir. İti bucaqlar fərqi tapın.

**Həlli.**  $4k + 6k = 90^\circ \Rightarrow k = 10^\circ$ ,  $6k - 4k = 2k = 20^\circ$ . **Cavab:**  $20^\circ$ .



5. Bərabəryanlı ABC ( $AB = BC$ )  $\Delta$ -da  $\text{tg} \angle B = \frac{5}{12}$ .

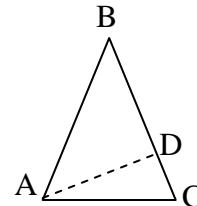
Oturacağa bitişik bucağın tangensini tapın.

**Həlli.** BC tərəfinə AD perpendikulyarını çəkək.

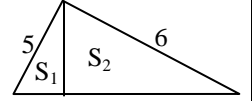
Şərtə görə  $AD:BD = 5:12 \rightarrow AD = 5k$ ,  $BD = 12k$ .

Pifaqor teoreminə görə  $AB = 13k \rightarrow CD = 13k - 12k = k$ .

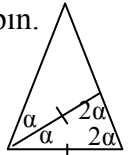
**Cavab:**  $\text{tg} \angle C = AD:DC = 12k : k = 12$ .



**Çalışmalar.1)** Katetləri 5 sm və 6 sm olan düzbucaqlı üçbucağın düz bucaq təpəsindən hündürlük çəkilmişdir.  $S_1 : S_2$  sahələr nisbətini tapın.

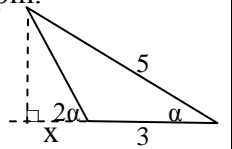


2) Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağın tən böləninə bərabərdir. Təpə bucağını tapın.



**Həlli.** Şəkilə əsasən  $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$ .

3) Bərabəryanlı üçbucağın oturacağı 20 sm, bu tərəfə çəkilmiş hündürlük 15 sm-dir. Yan tərəfə çəkilmiş hündürlüyü tapın.



4) Şəkilə əsasən  $x$ -i tapın.

5) Bərabərtərəfli üçbucağın sahəsi  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ -dür. Onun hündürlüyünü tapın.

6) Bərabəryanlı üçbucağın təpədəki xarici bucağı  $120^\circ$ , oturacağı  $2\sqrt{3}$  sm-dir. Onun sahəsini tapın.

7) Tərəfləri 2 sm, 2 sm və 4 sm olan üçbucağın növünü təyin edin.

## § 23. Çalışmalar

1. Perimetri 51 sm olan bərabərtərəfli  $\Delta$ -in tən bölməni neçə sm-dir.

- A) 17 B)  $7,5\sqrt{2}$  C)  $8,5\sqrt{3}$  D)  $1,5\sqrt{3}$  E)  $0,5\sqrt{3}$

2. Perimetri 32 sm olan bərabəryanlı  $\Delta$ -in oturacağı 12 sm-dir. Yan tərəfə çəkilmiş hündürlük neçə sm-dir.

- A) 4,8 B) 7,5 C) 9,6 D) 6 E) 8

3. Sahəsi  $4\sqrt{3}$  sm<sup>2</sup> olan bərabərtərəfli  $\Delta$ -in perimetri neçə sm-dir?

- A) 12 B)  $5\sqrt{2}$  C) 15 D)  $5\sqrt{3}$  E) 9

4. Bərabərtərəfli üçbucağın neçə simmetriya oxu vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

5. Bərabəryanlı üçbucağın neçə simmetriya oxu vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

6. Uzunluğu 57 sm olan məftil parçasından oturacağı 19 sm olan bərabəryanlı üçbucaq düzəldilər. Yan tərəfə çəkilmiş tən bölmə neçə sm-dir?

- A) 19 B)  $9,5\sqrt{2}$  C)  $9,5\sqrt{3}$  D)  $4,5\sqrt{3}$  E)  $8,5\sqrt{3}$

7. Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəflərindən birinə çəkilmiş medianı onun perimetrini 6 sm və 10 sm-lik hissələrə bölür. Oturacaq neçə sm-dir?

- A)  $1\frac{2}{3}$  B) 8 C) 4 D)  $3\frac{2}{3}$  E)  $2\frac{2}{3}$

8. Perimetri 14 sm üçbucağın medianı onu perimetrləri 8 sm və 12 sm iki üçbucağa ayırır. Median neçə sm-dir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 5

9. ABC üçbucağının ( $AB \neq BC$ ) B təpəsindən çəkilən median bu üçbucağı iki bərabəryanlı üçbucağa ayırır. ABC bucağını tapın.

- A)  $60^\circ$  B)  $75^\circ$  C)  $90^\circ$  D)  $120^\circ$  E)  $150^\circ$

10. ABC üçbucağının ( $AB \neq BC$ ) B təpəsindən çəkilən tən bölməni bu üçbucağı iki bərabəryanlı üçbucağa ayırır. ABC üçbucağının kiçik bucağını tapın.

- A)  $36^\circ$  B)  $42^\circ$  C)  $45^\circ$  D)  $60^\circ$  E)  $72^\circ$

11. Perimetri 57 sm olan bərabərtərəfli  $\Delta$ -in medianı neçə sm-dir.

- A) 7 B)  $7,5\sqrt{2}$  C)  $8,5\sqrt{3}$  D)  $9,5\sqrt{3}$  E)  $10,5\sqrt{3}$

12. Perimetri 36 sm olan bərabəryanlı  $\Delta$ -in oturacağı 12 sm-dir. Yan tərəfə çəkilmiş tən bölmə neçə sm-dir.

- A) 6 B)  $5\sqrt{2}$  C)  $6\sqrt{3}$  D)  $5\sqrt{3}$  E)  $12\sqrt{3}$

13. Sahəsi  $9\sqrt{3}$  sm<sup>2</sup> olan bərabərtərəfli  $\Delta$ -in perimetri neçə sm-dir?

- A) 18 B)  $15\sqrt{2}$  C) 15 D)  $24\sqrt{3}$  E) 279

14. Bərabərtərəfli üçbucağın neçə simmetriya mərkəzi vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

15. Bərabəryanlı üçbucağın neçə simmetriya mərkəzi vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

16. Uzunluğu 39 sm olan məftil parçasından oturacağı 13 sm olan bərabəryanlı üçbucaq düzəldilər. Yan tərəfə çəkilmiş median neçə santimetrdir?

- A) 13 B)  $4,5\sqrt{2}$  C)  $5,5\sqrt{3}$  D)  $4,5\sqrt{3}$  E)  $6,5\sqrt{3}$

17. Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəflərindən birinə çəkilmiş medianı onun perimetrini 12 sm və 21 sm-lik hissələrə bölür. Oturacaq neçə sm-dir?

- A) 5 B) 8 C) 14 D) 17 E) 7

18. Perimetri 24 sm üçbucağın medianı onu perimetrləri 18 sm və 14 sm iki üçbucağa ayırır. Median neçə sm-dir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 5

19. ABC üçbucağının B təpəsindən çəkilən hündürlüyü bu üçbucağı iki bərabəryanlı üçbucağa ayırır. A bucağını tapın.

- A)  $45^\circ$  B)  $30^\circ$  C)  $90^\circ$  D)  $60^\circ$  E)  $15^\circ$

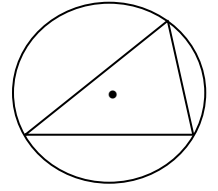
20. Bərabəryanlı üçbucağın təpəsindəki xarici bucağı qonşu daxili bucaqdan beş dəfə böyük -dür. Oturacağı bitişik bucağı tapın.

- A)  $30^\circ$  B)  $45^\circ$  C)  $60^\circ$  D)  $75^\circ$  E)  $80^\circ$

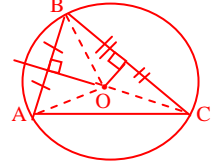
## § 24. Üçbucaq daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr

### 1.Üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrə

Tərif: *Üçbucağın üç tərəsindən keçən çevrəyə üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrə deyilir.*



**Teorem.** *İstənilən üçbucağın xaricinə çevrə çəkmək olar və bu çevrənin mərkəzi tərəflərin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsi, radiusu isə bu nöqtə ilə hər hansı tərəni birləşdirən parçadır.*

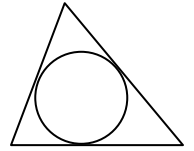


**İsbatı.** Parçanın orta perpendikulyarlarının xassəsinə görə tərəflərin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsi təpələrdən bərabər məsafədədir:  $AO = OB = OC$ . Ona görə də, O nöqtəsini mərkəz, AO parçasını isə radius ( $R$ ) qəbul edib çevrə çəksək, bu çevrə A, B və C nöqtələrindən keçəcəkdir. Tərifə görə bu çevrə ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrədir. Üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu əsasən  $S = \frac{abc}{4R}$  (bax sahə düsturlarına) düsturu və yaxud sinuslar teoremindən tapılır.

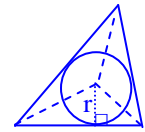
### 2.Üçbucaq daxilinə çəkilmiş çevrə

Tərif: *Üçbucağın üç tərəfinə daxildən toxunan çevrəyə üçbucaq daxilinə çəkilmiş çevrə deyilir.*

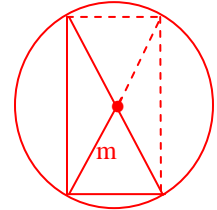
**Teorem.** *İstənilən üçbucağın daxilinə çevrə çəkmək olar və bu çevrənin mərkəzi tənbönlərin kəsişmə nöqtəsi, radiusu ( $r$ ) isə kəsişmə nöqtəsindən tərəfə endirilən perpendikulyardır.*



**İsbatı.** Toxunanın əsas xassəsinə görə tənbönlərin kəsişmə nöqtəsi üçbucağı tərəflərindən bərabər məsafədədir. Ona görə də, tənbönlərin kəsişmə nöqtəsini mərkəz, bu nöqtədən tərəfə endirilmiş perpendikulyarı isə radius ( $r$ ) qəbul edib çevrə çəksək, onda bu çevrə üç tərəfə toxunacaqdır ki, o da daxilə çəkilmiş çevrədir. Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu əsasən  $S = pr$  (bax sahə düsturlarına) düsturundan tapılır.



**Nəticə1.** *Düzbucaqlı  $\Delta$ -in xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi hipotenuzun orta nöqtəsi, radiusu isə düz bucaq tərəsindən çəkilmiş mediana bərabərdir:  $R = m = c : 2$  ( $c$  – hipotenuzun uzunluğudur)*



Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.

**Nəticə2.** *Düzbucaqlı  $\Delta$ -in daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu katetlərinin cəmi ilə hipotenuzun fərqi yarısına bərabərdir:  $r = (a + b - c) : 2$ .*



Bu xassənin isbatı toxunanın 2-ci xassəsindən alınır.

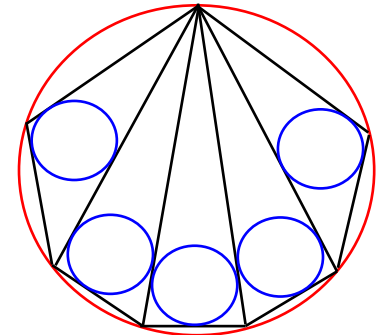
**Qeyd.** Üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafəni  $x$  ilə işarə etsək, onda

$$x^2 = R^2 - 2Rr, \quad (R, r - \text{radiuslardır}).$$

**Çalışma.** Tərəfləri  $\sqrt{5}$  sm, 2 sm və 3 sm olan üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusunu tapın.

**Həlli.**  $(\sqrt{5})^2 + 2^2 = 3^2$  olduğu üçün bu üçbucaq düzbucaqlı  $\Delta$ -dir.

Ona görə də,  $R = c : 2 = 3 : 2 = 1,5(\text{sm})$ ,  $r = \frac{2 + \sqrt{5} - 3}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .



## § 25. İxtiyari üçbucaqda triqonometrik funksiyalar.

Həndəsədə triqonometrik funksiyaların düzbucaqlı üçbucaqdakı tərifləri ilə artıq tanışıq. Bu təriflər yalnız iti bucaqların triqonometrik funksiyalarını təyin edir. Lakin ixtiyari üçbucağın tərəf və bucaqları arasındakı münasibətləri ətraflı öyrənmək üçün düzbucaqlı üçbucaqdakı təriflər kifayət etmir. Ona görə də, **ixtiyari üçbucağın hər bir bucağının triqonometrik funksiyalarını müəyyən edən və əvvəlki təriflərlə ziddiyyət təşkil etməyən** tərifin verilməsinə ehtiyac vardır.

Onu da qeyd edək ki, müxtəlif təriflər mövcud olsa da, yeni tərifin üçbucağa məxsus anlayışlar dilində verilməsini daha məqsədəuyğun hesab edirik. Beləliklə, triqonometrik funksiyaların yeni təriflərini aşağıdakı şəkildə veririk.

**Tərif:** İstənilən üçbucaqda bucaq qarşısındakı tərəfin bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə nisbətinə həmin **bucağın sinusu** deyilir:

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}, \quad \sin \beta = \frac{b}{2R}, \quad \sin \gamma = \frac{c}{2R}$$

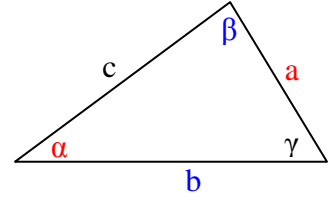
İstənilən üçbucaqda **bucağın kosinusu**

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$$

düsturları, **tangens və kotangens** isə

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

düsturları ilə təyin edilir, burada  $a, b, c$  üçbucağın tərəfləri,  $\alpha, \beta, \gamma$  uyğun olaraq tərəflər qarşısındakı bucaqlar,  $R$  - üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur.



**İxtiyari üçbucaqda triqonometrik funksiyaların yeni tərifləri üçbucaqların nəzəri cəhətdən öyrənilməsində çox əlverişli olsa da, bu təriflərin köməyi ilə isbat olunan xassələr və ondan çıxan nəticələr praktik cəhətdə daha çox tətbiq olunur. Ona görə də, yeni təriflər əsasında isbat olunan bir çox teorem və ondan çıxan nəticələrlə tanış olmağa çalışacağıq.**

**Xüsusi hal.** Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu onun xaricinə çəkilmiş çevrənin diametri olduğu üçün

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R} = \frac{a}{c}; \quad \sin \beta = \frac{b}{c};$$

Pifaqor teoreminə görə  $c^2 = a^2 + b^2$ , onda

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{2b^2}{2bc} = \frac{b}{c}; \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2a^2}{2ac} = \frac{a}{c};$$

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}; \quad ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}.$$

**Deməli, düzbucaqlı üçbucaqda yeni təriflər triqonometrik funksiyaların klassik tərifləri ilə eynidir.**

Bu təriflərdən bilavasitə aşağıdakı **məşhur teoremlər** alınır.

**Sinuslar teoremi.** *İstənilən üçbucaqda tərəflərin öz qarşılarındakı bucaqların sinuslarına nisbəti sabitdir və bu sabit ədəd üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə ( $2R$ ) bərabərdir, yəni*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

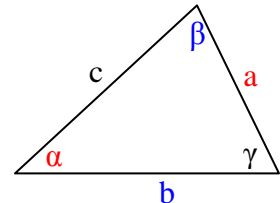
**Kosinuslar teoremi.** *İstənilən üçbucaqda aşağıdakılar doğrudur:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

*burada  $a, b, c$  tərəflər,  $\alpha, \beta, \gamma$  - tərəflər qarşısındakı uyğun bucaqlardır.*



## § 26. Çalışmalar

1. Tərəfləri 2 sm , 3 sm və 4 sm olan üçbucaqda böyük bucağın kosinusunu tapın.

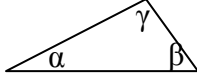
3. Tərəfləri 3 sm , 4 sm və 5 sm olan üçbucaqda böyük bucağın sinusunu tapın.

5. Xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu 5 sm ,tərəflərindən biri isə 8 sm olan üçbucaqda bu tərəf qarşısındakı bucağın sinusunu tapın.

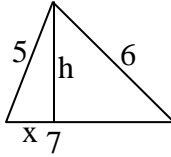
7. Üçbucağın iki tərəfi  $4\sqrt{3}$  sm və 10 sm ,bu tərəflər qarşısındakı bucaqların kosinusları uyğun olaraq 0,8 və 0,5-dir. Üçüncü tərəfin uzunluğunu tapın.

9. Üçbucağın bir tərəfi 9 sm , bu tərəf qarşısındakı bucağın kosinusunu 0,6-dır.Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

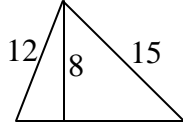
11. Şəkildə  $\cos\alpha = 0,72$  ,  $\cos\beta = 0,8$  olduğunu bilərək  $\gamma$  bucağının növünü təyin edin.



13. Tərəfləri 5 sm , 6 sm və 7 sm olan üçbucaqda kiçik tərəfin böyük tərəf üzərindəki proyeksiyasını(x) tapın.



15. Üçbucağın iki tərəfi 15 sm və 12 sm, üçüncü tərəfə endirilmiş hündürlük 8 sm-dir. Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.



2. Tərəfləri 5 sm , 6 sm və 7 sm olan üçbucaqda kiçik bucağın kosinusunu- nu tapın.

4. Tərəfləri 5 sm , 12 sm və 13 sm olan üçbucaqda kiçik bucağın sinusunu- nu tapın.

6. Xaricinə çəkilmiş çevrənin uzunluğu  $16\pi$  sm, bucaqlarından biri  $60^\circ$  olan üçbucaqda bu bucaq qarşısındakı tərəfi tapın.

8. Üçbucağın iki tərəfi 9 sm və 12 sm ,bu tərəflər qarşısındakı bucaqların kosinusları uyğun olaraq 0,75 və 0,85-dir. Üçüncü tərəfin uzunluğunu tapın.

10. Bir tərəfi 9 sm , bu tərəf qarşısındakı bucağın  $120^\circ$  olduğunu bilərək xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

12. Şəkildə  $\cos\alpha = 0,2$  ,  $\cos\beta = 0,3$  olduğunu bilərək  $\gamma$  bucağının növünü təyin edin.

14. Şəkilə əsasən böyük tərəfə endirilmiş hündürlüyü (h) tapın.

16. Üçbucağın iki tərəfi 17 sm və 10 sm, üçüncü tərəfə endirilmiş hündürlük 8 sm-dir. Daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

17. Üçbucaqda uzunluğu 30 sm olan tərəfin qarşısındakı bucaq  $30^\circ$ -dir. Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

**Həlli.** Sinuslar teoreminə görə  $30:\sin 30^\circ = 2R \Rightarrow 2R = 60 \Rightarrow R = 30$  sm.

18. Tərəfləri 3sm , 5sm , 7 sm olan üçbucağın növünü təyin edin və böyük bucağı tapın.

**Həlli.**  $7^2 > 3^2 + 5^2$  olduğu üçün, bu üçbucaq **korbucaqlıdır**.cos-lar teoreminə görə  $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -0,5 \Rightarrow \alpha = 120^\circ$ .

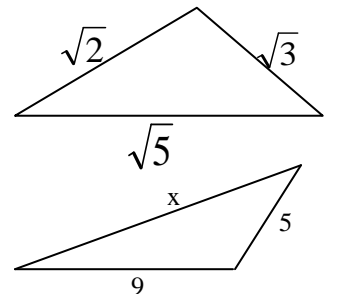
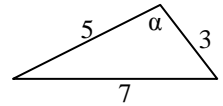
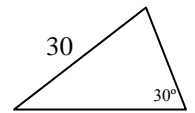
19. Tərəfləri  $\sqrt{2}$  ;  $\sqrt{3}$  və  $\sqrt{5}$  olan üçbucağın sahəsini tapın.

**Həlli.**  $(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2$  olduğu üçün bu üçbucaq düzbucaqlı  $\Delta$ -dır. Ona görə də,  $S = 0,5 \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 0,5 \sqrt{6}$ .

20. Şəkildəki korbucaqlı üçbucağın tərəfləri tam ədədlərlə ifadə olunmuşdur.x -in mümkün qiymətlər cəmini tapın.

**Həlli.**  $\Delta$  bərabərsizliyinə görə  $4 < x < 14$ . Bu üçbucaq korbucaqlı olduğu üçün  $11 \leq x \leq 13$ , çünki  $x^2 > 9^2 + 5^2$ .

**Cavab:**  $11 + 12 + 13 = 36$

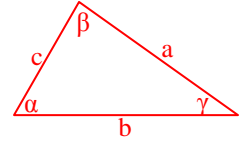


## § 27. Sinuslar və kosinuslar teoremindən çıxan nəticələr

**Nəticə 1. İstənilən  $\Delta$ -da tərəflərlə qarşı bucaqların sinusları mütənasibdir:**

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Doğrudan da, sin-lar teoreminə görə  $a : \sin\alpha = b : \sin\beta = c : \sin\gamma \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ ,  $b : c = \sin\beta : \sin\gamma \Rightarrow a : b : c =$   
 $= \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ .



**Nəticə 2. Bir üçbucağın iki bucağı digər üçbucağın iki bucağına bərabədirsə, onda bu üçbucaqların tərəfləri mütənasibdir:**

$$a : b : c = a_1 : b_1 : c_1.$$

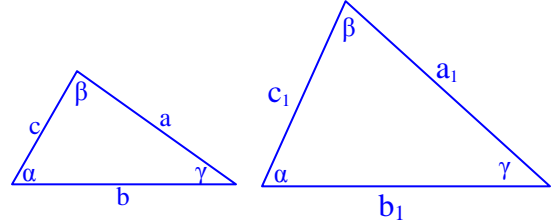
**İsbatı.** Bu üçbucaqların üçüncü bucaqları da bərabər olduğu üçün

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a_1 : b_1 : c_1.$$

Bu nəticədən alırıq ki, *bir üçbucağın bucaqları digər üçbucağın bucaqlarına bərabədirsə, onda bu üçbucaqların uyğun tərəfləri nisbəti(k) də bərabərdir:*

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k,$$

burada  $k$  ədədi mütənasiblik əmsalı adlanır.

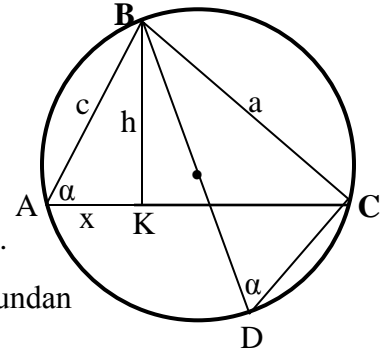


**Nəticə 3. İti bucaq üçün triqonometrik funksiyaların yeni və klassik tərifləri eynigüclüdür.**

**İsbatı.** Tutaq ki, ABC üçbucağı verilmişdir,  $\alpha$  onun iti bucağı, BK hündürlük, BD xaricə çəkilmiş çevrənin diametridir.

$$\text{Göstərək ki, } \sin\alpha = \frac{h}{c} = \frac{a}{2R}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{c} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}, \quad (AC = b).$$

Şəkilə əsasən ABK və BDC üçbucaqlarının bucaqları bərabər olduğundan onların tərəfləri mütənasibdir, ona görə də  $h : c = a : (2R) = \sin\alpha$ ;



$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{x^2 + h^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{x^2 + b^2 - (b-x)^2}{2cb} = \frac{2bx}{2bc} = \frac{x}{c}.$$

**Nəticə 4. Kor bucaqdan iti bucağa keçid düsturları:**

$$\sin\alpha = \sin(180-\alpha), \quad \cos\alpha = -\cos(180-\alpha)$$

**İsbatı.** Şəkilə əsasən  $h^2 + x^2 = c^2$ , onda

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{x^2 + h^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{x^2 + b^2 - (b+x)^2}{2cb} = \\ &= -\frac{2bx}{2bc} = -\frac{x}{c} = -\cos(180-\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = -\cos(180-\alpha). \end{aligned}$$

ABC korbucaqlı üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəni nəzərdən keçirək. B bucağının söykəndiyi qövs üzərində ixtiyari D nöq - təsini qeyd edək. Onda şəkildən aydındır ki,

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \sin(180-\alpha).$$

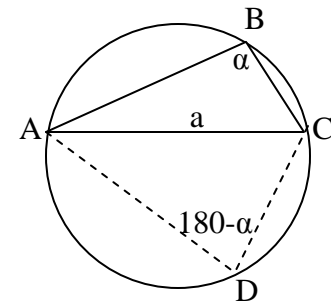
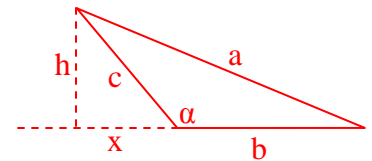
Bu qeydə əsasən *ixtiyari üçbucağın  $\alpha$  bucağı üçün*

$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180-\alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180-\alpha) = -\operatorname{tga}, \quad \operatorname{ctg}(180-\alpha) = -\operatorname{ctga},$$

çevirmə düsturlarını alırıq.

*Aydındır ki, kor bucağın sinusunu müsbət, digər trig.funksiyaların qiymətləri isə mənfi.*



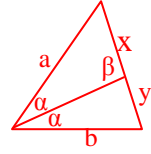
## 28. Tənbölənin xassələri

Xatırlatma. *Təpə ilə qarşı tərəfi birləşdirən və təpədəki bucağı yarı bölən d/x parçasına tənbölən deyilir.*

**Xassə 1. Tənbölən qarşı tərəfi uyğun olaraq çəkildiyi bucağın tərəfləri nisbətində bölür, yəni**

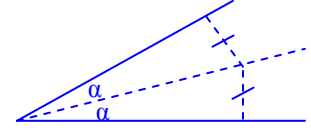
$$x : y = a : b$$

**İsbatı.** Şəkildən alırıq ki,  $x : \sin \alpha = a : \sin \beta$ ,  $y : \sin \alpha = b : \sin(180^\circ - \beta) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x : a = \sin \alpha : \sin \beta$ ,  $y : b = \sin \alpha : \sin \beta \Rightarrow x : a = y : b \Rightarrow x : y = a : b$ .



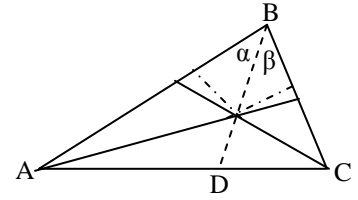
**Xassə 2. Tənbölən üzərində olan istənilən nöqtə çəkildiyi bucağın tərəflərindən bərabər məsafədədir.**

**İsbatı.** Tənbölənin ixtiyari nöqtəsindən tərəflərə perpendikulyarlar endirək. Onda burada alınan düzbucaqlı üçbucaqlar bərabər olduğundan həmin nöqtədən tərəflərə qədər məsafələr də bərabər olacaqdır.



**Xassə 3. Tənbölənlərin üçü də bir nöqtədə kəşisir.**

**İsbatı.** A və B bucaqlarının tənbölənlərini çəkək. Bu tənbölənlərin kəşişmə nöqtəsindən keçən BD parçasının tənbölən olduğunu isbat edək, yəni göstərək ki,  $\alpha = \beta$ . Kəşişmə nöqtəsindən AB və BC tərəflərinə endirilən perpendikulyarlar bərabər və B təpəsinə bitişik düzbucaqlı üçbucaqlar ortaq hipotenuza malik olduğundan bu üçbucaqlar bərabərdir. Buradan da alırıq ki,  $\alpha = \beta$ .



**Xassə 4. Tənbölənin kvadratı çəkildiyi bucağın tərəfləri hasili ilə qarşı tərəfdə ayırdığı parçalar hasili fərqi bərabərdir:**

$$l^2 = ab - xy$$

**İsbatı.** Tutaq ki,  $a \neq b$ . Onda şəkildəki üçbucaqlardan alırıq:

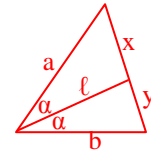
$$\cos \alpha = \frac{a^2 + l^2 - x^2}{2al} = \frac{b^2 + l^2 - y^2}{2bl} \Rightarrow \frac{a^2 + l^2 - x^2}{a} = \frac{b^2 + l^2 - y^2}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ba^2 + bl^2 - bx^2 = ab^2 + al^2 - ay^2 \Rightarrow ba^2 - bx^2 - ab^2 + ay^2 = al^2 - bl^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2(a - b) = ab(a - b) - bx \cdot x + ay \cdot y.$$

1-ci xassəyə əsasən  $bx = ay$ . Bunu yuxarıda nəzərə alsaq

$$l^2(a - b) = ab(a - b) - axy + bxy = ab(a - b) - xy(a - b) \Rightarrow l^2 = ab - xy.$$



**5. Üçbucağın tərəflərini a, b, c, uyğun tərəflərə çəkilmiş tənbölənləri  $l_a, l_b, l_c$  ilə işarə etsək, onda hər bir tənbölən kəşişmə nöqtəsində aşağıdakı nisbətdə bölünür:**

$$l_a \text{ üçün } OE : AO = a : (b + c);$$

$$l_b \text{ üçün } OD : BO = b : (a + c);$$

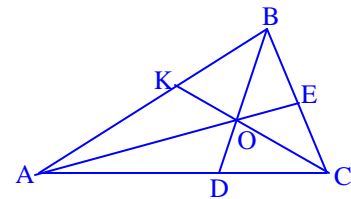
$$l_c \text{ üçün } OK : OC = c : (a + b).$$

**İsbatı.** Tutaq ki, ABC üçbucağının tənbölənləri O nöqtəsində kəşisir. Onda 1-ci xassəyə görə  $l_a$  üçün

$$OE : AO = EC : AC = BE : AB \Rightarrow AB \cdot EC = AC \cdot BE \Rightarrow c \cdot EC = b(a - EC) \Rightarrow$$

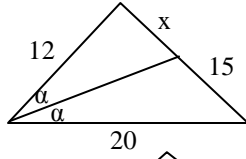
$$\Rightarrow EC = \frac{ab}{b + c} \Rightarrow OE : AO = \frac{a}{b + c};$$

Digər bərabərliklər də eyni qayda ilə isbat olunur.

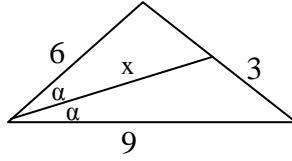


## 29. Tənbölənə aid Çalışmalar

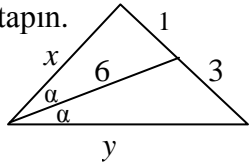
1. Şəkilə əsasən  $x$ -i tapın.



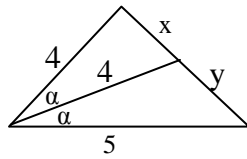
2. Şəkilə əsasən  $x$ -i tapın.



3. Şəkilə əsasən  $x + y$  cəmini tapın.

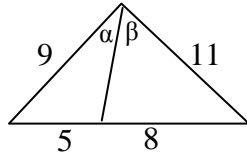


4. Şəkilə əsasən  $xy$  hasilini tapın.



5. Şəkilə əsasən hansı münasibətlər doğrudur?

1)  $\alpha < \beta$  ; 2)  $\beta < \alpha$  ; 3)  $\alpha = \beta$  .



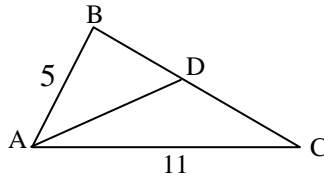
6. Üçbucağın tənböləni onun sahəsini 2:3 nisbətində bölür. Tənbölənin çəkildiyi bucağın tərəfləri nisbətini tapın

7. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni yan tərəfini 3:4 nisbətində bölür. Bu tənbölən təpədən çəkilmiş hündürlüyü hansı nisbətdə bölür? (Müxtəli hallara baxın)

8. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni onun sahəsini 4:5 nisbətində bölür. Bu tənbölən təpədən çəkilmiş medianı hansı nisbətdə bölür? (Müxtəli hallara baxın)

9. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni onun perimetrini yarıya bölür. Yan tərəfin oturacağına nisbətini tapın.

10. ABC üçbucağında AD tənbölən,  $\angle DAC = \angle ACD$ ,  $AB = 5$  sm,  $AC = 11$  sm.  $S_{ABC} = ?$



11. Perimetri 21 sm olan üçbucağın tənböləni onu perimetrleri 12 sm və 15 sm olan iki üçbucağa ayırır. Tənbölənin çəkildiyi bucağın tərəfləri nisbətini tapın.

A) 1:2 B) 2:3 C) 3:4 D) 4:5 E) 3:5

12. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni yan tərəfini 6:8 nisbətində bölür. Bu tənbölən təpədən çəkilmiş tənböləni hansı nisbətdə bölür?

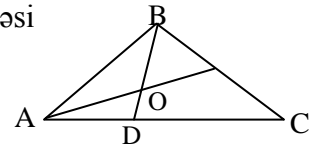
(Müxtəli hallara baxın)

13. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni yan tərəfi 5:7 nisbətində bölür. Bu tənbölən yan tərəfləri birləşdirən orta xətti hansı nisbətdə bölür?

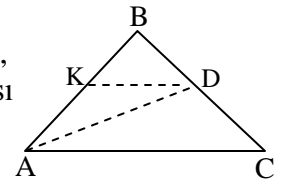
A) 2:1 B) 3:2 C) 4:3 D) 5:2 E) 5:3

14. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni onun perimetrini yarıya bölür. Təpə bucağını tapın.

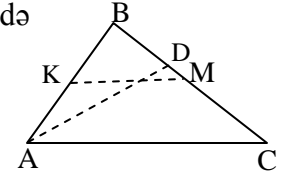
15. ABC üçbucağında  $AB = 5$  sm,  $BC = 6$  sm və  $AC = 7$  sm, O nöqtəsi tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsidir.  $BO:OD$  nisbətini tapın.



16. ABC üçbucağında  $AB = 5$  sm,  $AC = 7$  sm, AD tənbölən, DK parçası AC-yə paraleldir. DK neçə sm-dir.



17. ABC üçbucağın AD tənböləni BC tərəfini 7:9 nisbətində bölür. Bu tənbölən KM orta xəttini hansı nisbətdə bölür?



A) 6:5 B) 7:5 C) 7:3 D) 7:2 E) 5:3



### §30. “Möcüzəli” üçbucaq

Təpə bucağı  $36^\circ$  olan bərabəryanlı üçbucağın qəribə xassələri vardır. Qəribəliklər əsasən ondan ibarətdir ki, bu  $\Delta$ -da “**Qızıl qayda**” adlanan bölgülər mövcuddur. Təbiətdə, memarlıq sənətlərində və digər sahələrdə qədim tarixdən məlum olan - “**Qızıl qayda**” kimi tanınan bu qayda parçanın aşağıdakı kimi bölgüsüdür:

**Parça iki hissəyə elə bölünür ki, parçanın öz böyük hissəsinə nisbəti böyük hissənin kiçik hissəyə nisbətində bərabərdir, yəni uzunluğu  $a$ -ya bərabər olan parçanı iki hissəyə böldükdə böyük hissəni  $x$  işarə etsək, onda**

$$a : x = x : (a - x).$$

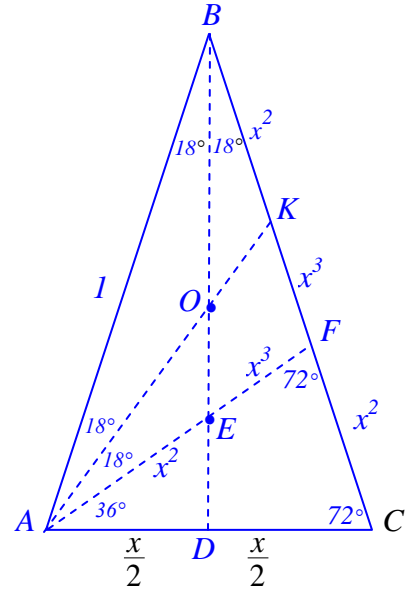
$x : a = k$  işarə edib alırıq:

$$k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62.$$

Əgər  $a$  parçasının uzunluğunu vahid qəbul etsək, onda  $x = k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

**Bu halda:** a)  $x^2 = 1-x$ ; b)  $x+1=1/x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

Göstərək ki, **yan tərəfi vahid və təpə bucağı  $36^\circ$**  olan ABC bərabəryanlı üçbucağında aşağıdakı xassələr doğrudur:



**Xassə 1. Oturacağa bitişik bucağın tənöləni yan tərəfi**

**“Qızıl qayda” ilə bölür.**

**İsbati.** AF tənöləninə görə  $AC : AB = FC : FB \Rightarrow AC : 1 =$

$$= (1 - FB) : FB \Rightarrow AC : 1 = (1 - AC) : AC \Rightarrow AC^2 + AC - 1 = 0 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = x.$$

Digər tərəfdən  $AB = BC = 1$ ,  $AC = AF = BF = x$  olduğu üçün  $BC : BF = 1 : x$ ,  $BF : FC = x : (1 - x) = x : x^2 = 1 : x \Rightarrow BC : BF = BF : FC$ .

**Xassə 2. Tənölənlərin kəsişmə nöqtəsi oturacağa bitişik bucaqların**

**tənölənlərini “Qızıl qayda” ilə bölür.**

**İsbati.** BE tənöləninə görə  $AE : EF = 1 : x \Rightarrow AE : (x - AE) = 1 : x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot AE = x - AE \Rightarrow AE = \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x^2+x} = x^2 \Rightarrow AE : EF = AF : AE.$$

Şəkildən aydındır ki,  $EF = x - x^2 = x(1 - x) = x \cdot x^2 = x^3$ ,  $FK = EF = x^3$ ,  $BK = AE = x^2$ .

Asanlıqla almaq olar ki,  $AK = \sqrt{3-4x}$ ;  $BD = h = \frac{\sqrt{3+x}}{2}$ .

$$\sin 18^\circ = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = h : 1 = \frac{\sqrt{3+x}}{2},$$

$$\cos 36^\circ = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - (1-x)}{2} = \frac{1+x}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 36^\circ = xh = \frac{x\sqrt{3+x}}{2} = \frac{\sqrt{(1-x)(3+x)}}{2} = \frac{\sqrt{2-x}}{2}.$$

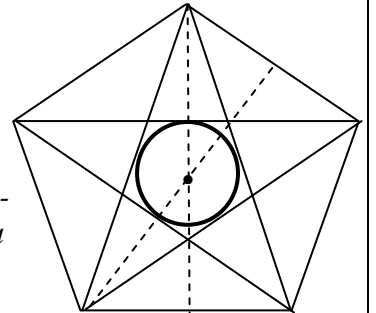
**Çalışma 1.** Şəkildəki qalan parçaları və digər bucaqların triqonometrik funksiyalarını  $x$ -lə ifadə edin.

**Çalışma 2.** “Möcüzəli” üçbucağın daha hansı xassələrini söyləyə bilərsiniz?

#### **Tapşırıq**

1. Bu şəkildə hansı fiqurlar təsvir edilmişdir?

2. Böyük beşbucaqların yan tərəfi  $x$  olarsa şəkildəki parçaları  $x$  ilə ifadə edin!

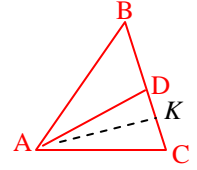


( $x$  - “qızıl bölgü”dəki ədəddir)

### § 31. Medianın xassələri

**Xassə 1. Median  $\Delta$ -ın sahəsini yarıya bölür:  $S(ABD) = S(BCD)$**

**İsbatı.** A təpəsindən AD medianı və AK hündürlüyünü çəkək. Onda  $S(ABD) = 0,5 AK \cdot BD = 0,5 AK \cdot CD = S(BCD)$



**Xassə 2. Medianların üçü də bir nöqtədə kəsişir və hər bir median kəsişmə nöqtəsində təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində bölünür.**

**İsbatı.**  $CC_1$  və  $AA_1$  medianlarını çəkək. Əvvəlcə göstərək ki,  $AO : OA_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$ . Doğrudan da,  $C_1A_1 \parallel AC$  olduğundan  $OA_1C_1$  və  $AOC$  üçbucaqlarının bucaqları bərabərdir. Ona görə də, sinuslar teoreminə əsasən bu üçbucaqların tərəfləri mütənasibdir:

$$AO : OA_1 = CO : OC_1 = AC : A_1C_1 = 2 = 2:1.$$

Göstərək ki, iki medianın kəsişmə nöqtəsindən keçən  $BB_1$  parçası da medianıdır, yəni  $AB_1 = B_1C$ . Yuxarıdakı mülahizə ilə alırıq ki,  $AB_1 : KA_1 = AO : OA_1 = B_1C : KA_1 = 2 \Rightarrow AB_1 = B_1C$ .

Beləliklə,

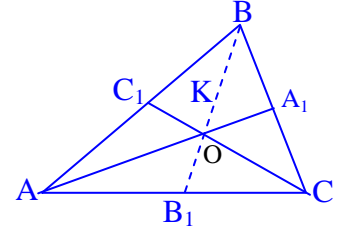
$$AO : OA_1 = CO : OC_1 = BO : OB_1 = 2 : 1$$

$$OA_1 : AA_1 = OC_1 : CC_1 = OB_1 : BB_1 = 1 : 3$$

Sonuncunu belə də ifadə etmək olar:

*Medianların üçü də bir nöqtədə kəsişir və hər bir medianın*

*kiçik hissəsi uyğun medianın  $\frac{1}{3}$ , böyük hissəsi isə  $\frac{2}{3}$  hissəsinə bərabərdir.*

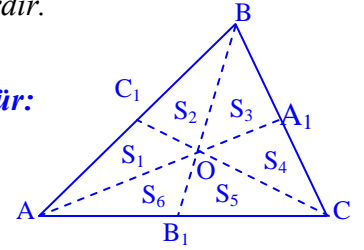


**Xassə 3. Üç median bu üçbucağı altı bərabər sahəli üçbucaqlara bölür:**

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S(ABC) : 6$$

**İsbatı.** Şəkildən aydındır ki,  $OC_1$ ,  $OA_1$ ,  $OB_1$  parçaları uyğun olaraq  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $AOC$  üçbucaqlarının medianlarıdır. Buna görə də  $S_1 = S_2$ ,  $S_3 = S_4$ ,  $S_5 = S_6$ . Digər tərəfdən bərabər sahəli  $AA_1C$  və  $BB_1C$  üçbucaqları  $B_1OA_1C$  ortaq hissəsinə,  $ABB_1$  və  $ACC_1$  üçbucaqları isə  $AC_1OB_1$  ortaq hissəsinə malik olduğundan  $S_3 = S_6$ ,  $S_2 = S_5$ . Beləliklə,

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{1}{6} S(ABC).$$



**Xassə 4. Medianın tərəflərlə ifadəsi :**

$$m_a = 0,5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} ; m_b = 0,5\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} ; m_c = 0,5\sqrt{2a^2 + 2b^2 - a^2} .$$

**İsbatı.** Kosinuslar teoreminə görə ( $m_a = m$ )

$$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha , c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{a}{2} \cos \varphi .$$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq

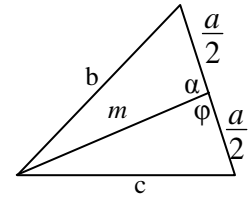
$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2} - ma(\cos \alpha + \cos \varphi)$$

alırıq.  $\alpha$  və  $\varphi$  qonşu bucaqlar olduğundan  $\cos \alpha + \cos \varphi = 0$ .

Beləliklə,

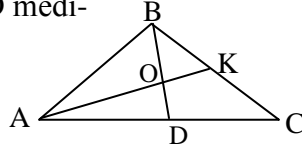
$$2b^2 + 2c^2 = 4m^2 + a^2 \Rightarrow m_a = 0,5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} .$$

*Digər düsturlar da eyni qayda ilə isbat olunur.*



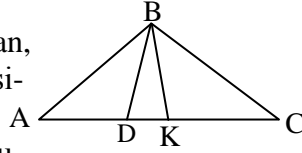
### 32. Mediana aid çalışmalar

1. ABC üçbucağında AK və BD medianlar, DOKC dördbucaqlısının sahəsi  $18 \text{ sm}^2$ -dir. ABC üçbucağının sahəsi neçə  $\text{sm}^2$ -dir?



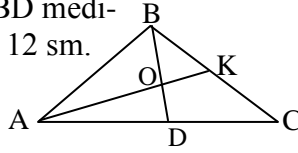
A) 36 B) 45 C) 54 D) 48 E) 56

2. ABC üçbucağında BK median, BD isə ABC üçbucağının sahəsinə 1:2 nisbətində bölür. BDK üçbucağının sahəsi  $6 \text{ sm}^2$  olduğunu bilərək ABC üçbucağının sahəsi neçə  $\text{sm}^2$ -dir?



A) 12 B) 27 C) 18 D) 24 E) 36

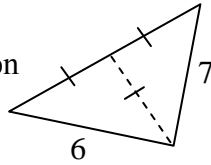
3. ABC üçbucağında AK və BD medianlar,  $OK:OD = 2:3$  və  $BD = 12 \text{ sm}$ . AK neçə  $\text{sm}$ -dir?



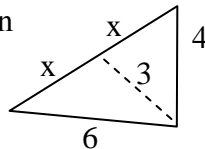
4. Üçbucağın medianları 6sm, 9sm və 12 sm-dir. Üçbucağın böyük tərəfi neçə  $\text{sm}$ -dir?

5. Üçbucağın bir tərəfi 8 sm, digər iki tərəfinə çəkilmiş medianları 18 sm və 15 sm-dir. Üçüncü median neçə  $\text{sm}$ -dir?

6. Şəkildəki verilənlərə əsasən üçbucağın sahəsini tapın.



7. Şəkildəki verilənlərə əsasən x parçasını tapın.



8. Üçbucağın medianlarından biri 18 sm-dir. Onun perimetrinin ən kiçik tam qiyməti neçə  $\text{sm}$ -dir?

9. Üçbucağın perimetri 24 sm-dir. Onun medianının ən böyük tam qiyməti neçə  $\text{sm}$ -dir?

10. Üçbucağın tərəflərinin kvadratları cəmi 240-dır. Onun medianlarının kvadratları cəmini tapın.

11. Üçbucağın medianlarının kvadratları cəmi 240-dır. Onun tərəflərinin kvadratları cəmini tapın.

12. ABC üçbucağının sahəsi  $42 \text{ sm}^2$ -dir. AOB üçbucağının sahəsi neçə  $\text{sm}^2$ -dir.  
A) 16 B) 15 C) 14 D) 12 E) 7

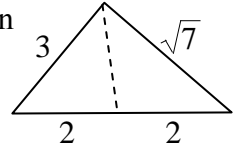
13. Sahəsi  $80 \text{ sm}^2$  olan ABC üçbucağında BK medianı və BD tən bölməni çəkilmiş və  $AB:BC = 2:3$ . BDK üçbucağının sahəsi neçə  $\text{sm}^2$ -dir.  
A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

14. ABC üçbucağında AK və BD medianları O nöqtəsində kəsişirlər,  $S_{OBK} : S_{AOB} = ?$

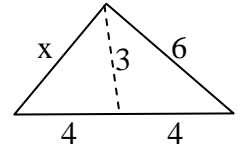
15. Üçbucağın medianları 9sm, 12sm və 15 sm-dir. Üçbucağın kiçik tərəfi neçə  $\text{sm}$ -dir?

16. Üçbucağın bir tərəfi 16 sm, digər iki tərəfinə çəkilmiş medianları 18 sm və 21 sm-dir. Üçüncü median neçə  $\text{sm}$ -dir?

17. Şəkildəki verilənlərə əsasən Medianın uzunluğunu tapın.



18. Şəkildəki verilənlərə əsasən x tərəfini tapın.



19. Üçbucağın medianlarından biri 8 sm-dir. Onun perimetri neçə santimetr ola bilər?  
A) 14 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

20. Üçbucağın perimetri 24 sm-dir. Onun medianı neçə santimetr ola bilər?  
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

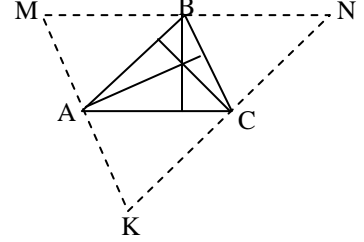
21. Üçbucağın tərəflərinin kvadratları cəmi 160-dır. Onun medianlarının kvadratları cəmi hansı ədəd ola bilər?  
A) 100 B) 110 C) 120 D) 125 E) 130

22. Üçbucağın medianlarının kvadratları cəmi 360-dır. Onun tərəflərinin kvadratları cəmi hansı ədəd ola bilər?  
A) 500 B) 520 C) 480 D) 540 E) 560

### §33. Hündürlüyün xassələri

1. *Üçbucağın hündürlükləri və ya onların uzantıları bir nöqtədə kəşişir, belə ki:*

- itibucaqlı  $\Delta$ -da hündürlüklərin kəşimə nöqtəsi  $\Delta$ -ın daxilində;*
- düzbucaqlı  $\Delta$ -da düz bucaq təpəsində;*
- korbucaqlı  $\Delta$ -da hündürlüklərin uzantılarının kəşimə nöqtəsi  $\Delta$ -ın xaricində yerləşir.*



**İsbati.** ABC üçbucağının təpələrindən qarşı tərəflərə çəkilmiş paralellərin kəşimə nöqtələrini M, N, K ilə işarə edək. Paralel düz xətlərin digər paralel düz xətlər arasında qalan parçaları bərabər olduğundan

$$KC = AB = CN, \quad AM = BC = AK, \quad MB = AC = BN.$$

Buradan alırıq ki, A, B, C nöqtələri MNK üçbucağının tərəflərinin orta nöqtələridir.

İki paralel düz xətdən birinə perpendikulyar olan d/x digərinə də perpendikulyar olduğu üçün ABC üçbucağının **hündürlükləri** MNK üçbucağının tərəflərinin **orta perpendikulyarları** üzərində olacaqdır.

MNK üçbucağının tərəflərinin orta perpendikulyarları bir nöqtədə kəşişdiyindən ABC üçbucağının hündürlükləri də bir nöqtədə kəşişir.

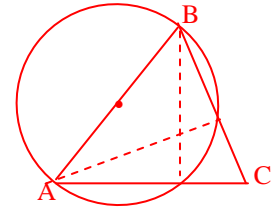
**Qeyd.** Sadə mühakimələrlə alırıq ki, itibucaqlı, düzbucaqlı və korbucaqlı üçbucaqların hündürlüklərinin kəşimə nöqtəsi uyğun olaraq verilmiş üçbucağın daxilində, düz bucaq təpəsində və üçbucaq xaricində yerləşir.

2. *İstənilən üçbucaqda tərəflərlə bu tərəflərə çəkilmiş hündürlüklər hasilləri bərabərdir:*

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

İsbatı aşgardır, çünki bu hasillərin hər biri üçbucağın sahəsinin iki mislinə bərabərdir.

3. *Diametri üçbucağın tərəfi olan çevrə bu tərəfin uclarından endirilən hündürlüklərin oturacqlarından keçir.*



İsbatı şəkildən aydındır, çünki  $180^\circ$ -li qövsə söykənən bucaq düz bucaqdır.

**Nəticə.** *Verilmiş üçbucağın yalnız bir tərəfini diametr qəbul edib çevrə çəkməklə onun hündürlüyünün üçünü də qurmaq mümkündür.*

#### Çalışmalar

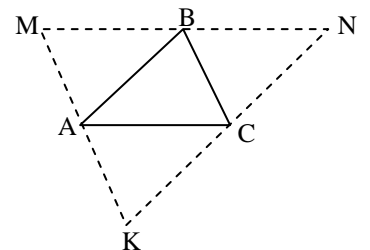
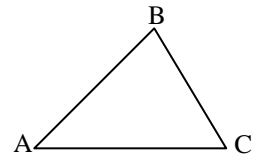
1. ABC üçbucağında  $AB = 12$  sm,  $BC = 10$  sm, BC tərəfinə çəkilmiş hündürlük 8 sm-dir. AB tərəfinə çəkilmiş hündürlüyü tapın.

2. ABC üçbucağında  $AB = 18$  sm,  $BC = 14$  sm,  $BC = 16$  sm. AB tərəfinə çəkilmiş hündürlüyü tapın.

3. ABC üçbucağında  $AB = 15$  sm,  $BC = 12$  sm, AC tərəfinə çəkilmiş hündürlük 9 sm-dir. Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

4. ABC üçbucağının perimetrinin 37 sm, A, B, C təpələri MNK üçbucağının tərəflərinin orta nöqtələridir. MNK üçbucağının perimetrini tapın.

5. ABC üçbucağının sahəsi  $33 \text{ sm}^2$ , A, B, C təpələri MNK üçbucağının tərəflərinin orta nöqtələridir. MNK üçbucağının sahəsini tapın.



### § 34. Üçbucağın sahə düsturları

1. Artıq bilirik ki, üçbucağın sahəsi(S) oturacaqla hündürlük hasilininin yarısına bərabərdir:  $S = 0,5ah_a = 0,5 bh_b = 0,5 ch_c$ .

Bu düsturlarda hündürlüyü tərəflərlə ifadə etsək (məs.  $h_a = b \sin \gamma$ ), onda

$$2. \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$

kor bucaq halında  $\sin \beta = \sin (180^\circ - \beta)$  düsturu nəzərə alınmışdır.

$$3. \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Heron düsturu}), \quad p = (a+b+c)/2;$$

$$4. \quad S = pr, \quad p = (a+b+c)/2; \quad \text{İsbatı: } S = ar/2 + br/2 + cr/2 = r(a+b+c)/2 = pr.$$

$$5. \quad S = abc / (4R), \quad (R - \text{üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur}).$$

**İsbatı:**  $S = 0,5bc \sin \alpha = 0,5bc \cdot a/(2R) = abc / (4R)$ .

**Qeyd.** Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən parça (n) bu

$\Delta$ -in sahəsini uyğun olaraq qarşı tərəfdəki parçalar nisbətində bölür:

$$S_1 : S_2 = x : y.$$

$$\text{İsbatı. } S_1 : S_2 = \frac{1}{2} xn \sin \alpha : \left( \frac{1}{2} ny \sin \beta \right) = x : y.$$

**Nəticə1.** Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən parçalar bu  $\Delta$ -in sahəsini uyğun olaraq qarşı tərəfdəki parçalar nisbətində bölür:

$$S_1 : S_2 : S_3 = a : b : c.$$

Bu xassənin isbatı da əvvəlki isbat kimi aparılır.

**Nəticə 2.** Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən parçalar qarşı tərəfi bərabər hissələrə bölürsə, onda uyğun sahələr də bərabərdir. Tərs mülahizə də doğrudur, yəni sahələr bərabərdirsə, uyğun parçalar da bərabərdir:

$$S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow a = b = c.$$

**Nəticə 3. İstənilən üçbucaqda:**

a) Median üçbucağın sahəsini yarıya bölür;

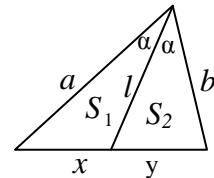
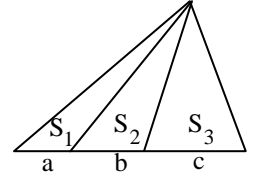
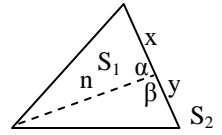
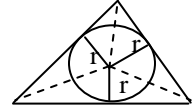
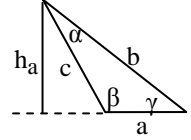
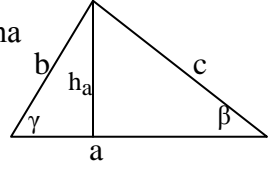
b) Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən və üçbucağın sahəsini yarı bölən parça mediandır;

c) Tənbölən üçbucağın sahəsini çəkildiyi bucağın uyğun tərəfləri nisbətində bölür:

$$S_1 : S_2 = a : b$$

Doğrudan da, tənbölənin xassəsinə görə  $a : b = x : y = S_1 : S_2$ .

d) Üçbucağın sahəsini və perimetrini yarıya bölən  $d/x$  daxil çəkilmiş çevrənin mərkəzindən keçir.



### § 35. Çalışmalar

1. İki tərəfi 13 sm və 8 sm ,bu tərəflər arasındakı bucağı  $30^\circ$  olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

3.Tərəfləri 11 sm, 7 sm və 6 sm olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

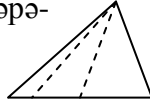
5.Bir tərəfi 12 sm, bu tərəfə bitişik bucaqları  $75^\circ$  və  $45^\circ$  olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

7. Tərəfləri 12 sm, 9 sm və 7 sm olan üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

9. Tərəfləri 12 sm, 9 sm və 7 sm olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

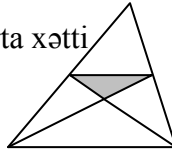
11.Düzbucaqlı üçbucaqda katetlərin hipotenuz üzərindəki proyeksiyası 3 sm və 4 sm-dir.Üçbucağın sahəsini hesablayın.

13.Sahəsi  $24 \text{ sm}^2$  olan üçbucağın bir tərəpəndən qarşı tərəfə çəkilən parçalar bu tərəfi 1:2:3 nisbətində bölür. Üçbucağın parçalar arasında qalan hissəsinin sahəsini tapın.

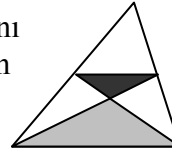


15. Oturacağı  $\sqrt{10}$  sm , tərəpə bucağının tangensi 0,75 olan bərabəryanlı üçbucağın sahəsini tapın.

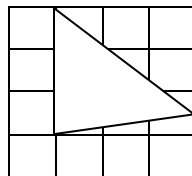
17. Sahəsi  $36 \text{ sm}^2$  olan üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir.Şəkildəki kölgəli üçbucağın sahəsini tapın.



19.Üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir.Şəkildəki boz üçbucağın sahəsi  $24 \text{ sm}^2$  -dir.Qara üçbucağın sahəsini tapın.



21.Tərəfi 1 sm olan kvadratlara bölünmüş fiqurdakı üçbucağın sahəsini tapın.



2.İki tərəfi  $2\sqrt{2}$  sm və 7 sm ,bu tərəflər arasındakı bucağı  $45^\circ$  olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

4.Tərəfləri 18 sm, 12 sm və 10 sm olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

6.Bir tərəfi 16 sm, bu tərəfə bitişik bucaqları  $105^\circ$  və  $30^\circ$  olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

8. Tərəfləri 10 sm, 9 sm və 11 sm olan üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

10. Tərəfləri 20 sm, 16 sm və 12 sm olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

12.Düzbucaqlı üçbucaqda katetlərin hipotenuz üzərindəki proyeksiyası 4 sm və 9 sm-dir.Üçbucağın sahəsini hesablayın.

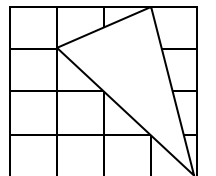
14.Üçbucağın bir tərəpəndən qarşı tərəfə çəkilən parçalar bu tərəfi üç bərabər hissəyə bölür. Üçbucağın parçalar arasında qalan hissəsinin sahəsinin  $19 \text{ sm}^2$  olduğunu bilərək, üçbucağın sahəsini tapın.

16.Oturacağı  $\sqrt{5}$  sm , tərəpə bucağının kotangensi 0,75 olan bərabəryanlı üçbucağın sahəsini tapın.

18.Üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir. Şəkildəki kölgəli üçbucağın sahəsinin  $5 \text{ sm}^2$  olduğunu bilərək,verilən üçbucağın sahəsini tapın.

20.Üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir.Şəkildəki boz üçbucağın sahəsi  $4 \text{ sm}^2$  -dir.Verilən üçbucağın sahəsini tapın.

22.Tərəfi 1 sm olan kvadratlara bölünmüş fiqurdakı üçbucağın sahəsini tapın.

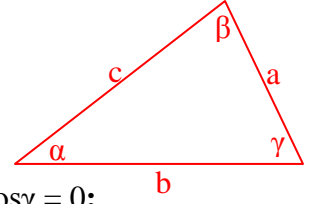


### §36. Tətqiqat xarakterli çalışma nümunələri

1.İsbat edin ki, a)  $\gamma = 90^\circ$  olduqda  $\rightarrow \cos\gamma = 0$ ;

b)  $c^2 > a^2 + b^2$  olduqda  $c$  tərəfi qarşısındakı bucaq kor bucaqdır;

c)  $c^2 < a^2 + b^2$  olduqda  $c$  tərəfi qarşısındakı bucaq iti bucaqdır;



**İsbatı.** a) Pifaqor teoreminə görə  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \cos\gamma = 0$ ;

b)  $c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 < 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \Rightarrow \cos\gamma < 0 \Rightarrow \gamma > 90^\circ$ ;

c)  $c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 > 0 \Rightarrow \cos\gamma > 0 \Rightarrow \gamma < 90^\circ$ , yəni  $\gamma$  iti bucaqdır.

**Qeyd edək ki,  $c^2 < a^2 + b^2, a^2 < c^2 + b^2, b^2 < a^2 + c^2$  şərtlərinin üçü də eyni zamanda ödənildikdə bu üçbucaq itibucaqlıdır.**

**Lakin verilmiş üçbucağın korbucaqlı olması üçün  $c^2 > a^2 + b^2, a^2 > c^2 + b^2, b^2 > a^2 + c^2$  şərtlərindən yalnız birinin ödənilməsi kifayətdir.**

2)İsbat edin ki, ixtiyari  $ABC$  üçbucağında  $\angle BOC = 2\angle A, \angle AOC = 2\angle B, \angle AOB = 2\angle C$ , burada  $O$  nöqtəsi xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.

3) **İsbat edin ki, ixtiyari üçbucağında**

$$ak_a + bk_b + ck_c = (a + b + c)r, \quad (*)$$

burada  $a, b, c$  - üçbucağın tərəfləri,  $k_a, k_b, k_c$  - üçbucağın daxilindəki ixtiyari nöqtədən tərəflərə endirilmiş perpendikulyarlar,  $r$ -daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

**İsbatı.**Şəkildən aydındır ki,  $ak_a + bk_b + ck_c = 2S = (a + b + c)r$ .

4) **İsbat edin ki, ixtiyari üçbucaqda**

$$\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta, \\ b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma, \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha, \end{aligned} \quad (**)$$

burada  $a, b, c$  - üçbucağın tərəfləri,  $\alpha, \beta, \gamma$  - bu tərəflər qarşısındakı bucaqlardır.

**İsbatı.**Kosinuslar teoreminə görə

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma, \quad a^2 + c^2 - b^2 = 2accos\beta, \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2bccos\alpha$$

Bu bərabərlikləri cüt-cüt tərəf-tərəfə toplamaqla alırıq:

$$2a^2 = 2ab\cos\gamma + 2accos\beta \Rightarrow a = b\cos\gamma + c\cos\beta;$$

$$2b^2 = 2ab\cos\gamma + 2bccos\alpha \Rightarrow b = a\cos\gamma + c\cos\alpha;$$

$$2c^2 = 2accos\beta + 2bccos\alpha \Rightarrow c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

5) **İsbat edin ki, ixtiyari itibucaqlı üçbucaqda**

$$k_a + k_b + k_c = R + r,$$

burada  $k_a, k_b, k_c$  - xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən tərəflərə endirilmiş perpendikulyar,  $R$  və  $r$  - xaricə və daxilə çəkilmiş çevrələrin radiuslarıdır.

**İsbatı.**(\*\*) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplasaq alırıq:

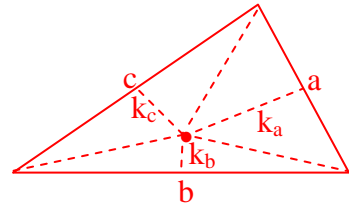
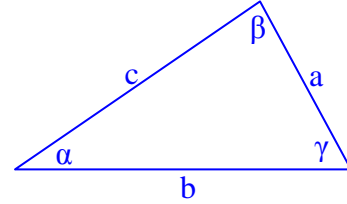
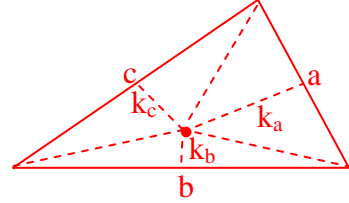
$$a + b + c = (b + c)\cos\alpha + (a + c)\cos\beta + (a + b)\cos\gamma.$$

Bu bərabərliyin hər tərəfini  $R$ -ə vurub  $R\cos\alpha = k_a, R\cos\beta = k_b, R\cos\gamma = k_c$

münasibətlərini və (\*) bərabərliyini nəzərə alsaq, nəhayət alırıq ki,

$$(a + b + c)R = (b + c)k_a + (a + c)k_b + (a + b)k_c = (a + b + c)k_a + (a + b + c)k_b + (a + b + c)k_c - (ak_a + bk_b + ck_c) \Rightarrow R + r = k_a + k_b + k_c.$$

**Nəticə.** Korbucaqlı üçbucaqda  $R + r = k_a + k_b - k_c$  ( $\gamma > 90^\circ$ ) bərabərliyi doğrudur.



## § 37. İxtiyari üçbucaqda çevirmə düsturları

Bir çox çalışmaları həllində, isbatlarda və bir sıra araşdırmalarda triqonometrik funksiyaların birindən digərinə və yaxud böyük argumentdən kiçik argumentə keçid zərurəti ilə qarşılaşırıq.

Artıq bilirik ki:

**1)  $\alpha$  iti bucağı üçün:**  
 $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ,  $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ ;  
 $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ .

**2) düz bucaq üçün :**  
 $\sin 90^\circ = 1$   
 $\cos 90^\circ = 0$   
 $\operatorname{tg} 90^\circ$ -yoxdur ,  $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$ .

**3)  $\alpha$  kor bucaq olduqda**  
 $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ ,  $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ ;  
 $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$ .

**Nəticə 1.** Bucaqları  $\alpha, \beta, \gamma$  olan üçbucaqda  
 $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$ ,  $\cos\alpha = -\cos(\beta + \gamma)$ ;  
 $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\beta + \gamma)$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}(\beta + \gamma)$ ;

**Nəticə 2.** Asanlıqla isbat etmək olar ki,  
 $\alpha$  iti bucağı üçün  
 $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$  ;  $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$   
 $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$  ;  $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$  ;

### Çalışmalar

1. ☺ Qonşu bucaqların:

- sinusları ... ədədlərdir;
- kosinusları ... ədədlərdir;
- tangensləri ... ədədlərdir;
- kotangensləri ... ədədlərdir;
- $\alpha + \beta = 180^\circ$  olduqda  
 $\cos\alpha + \cos\beta = \dots$   
 $\sin\alpha + \sin\beta = \dots$   
 $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dots$   
 $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dots$
- $\alpha + \beta = 90^\circ$  olduqda  
 $\cos\alpha = \dots$   
 $\sin\alpha = \dots$   
 $\operatorname{tg}\alpha = \dots$   
 $\operatorname{ctg}\alpha = \dots$

2. ☺  $0 < \alpha < 180^\circ$  olduqda:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dots$  ;
- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dots$  ;
- $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dots$  ;
- $\dots = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$  ;  $\alpha$  - iti buc.
- $\cos\alpha = \dots \sqrt{1 - \dots}$  ;  $\alpha$  - kor b.
- $\cos^2\alpha = \frac{1}{\dots}$  ;  $\sin^2\alpha = \frac{1}{\dots}$  ;
- $\operatorname{tg}\alpha$  və  $\operatorname{ctg}\alpha$  ... ədədlərdir.

### Üçbucaqda çevirmə düsturları cədvəli

	$(90^\circ - \alpha)$	$(90^\circ + \alpha)$	$(180^\circ - \alpha)$
sin	cos $\alpha$	cos $\alpha$	sin $\alpha$
cos	sin $\alpha$	- sin $\alpha$	- cos $\alpha$
tg	ctg $\alpha$	- ctg $\alpha$	- tg $\alpha$
ctg	tg $\alpha$	- tg $\alpha$	- ctg $\alpha$

3. Sadələşdirin:

- $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\alpha$  ;
- $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$  ;
- $\operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}^2\beta$  ;
- $\cos^2\alpha - \cos^2\alpha \sin^2\alpha - \cos^4\alpha + 1$ ;
- $1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha}$  ;

f)  $2 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}$  ;

k)  $\sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \cos^4\alpha$  ;

m)  $1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$  ;

n)  $1 - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^2\alpha$  ;

4.  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = a$  olduğunu bilərək:

- $\sin\alpha \cos\alpha$  ; b)  $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$  ; c)  $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$  ifadələrini  $a$  ilə ifadə edin.

5.  $\sin\alpha + \cos\alpha = a$  olduğunu bilərək:

- $\sin\alpha \cos\alpha$  ; b)  $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$  ifadələrini  $a$  ilə ifadə edin.

6.  $\alpha$  kor bucağı üçün  $\sin\alpha = 0,6$  .Digər triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın.

7.  $\operatorname{ctg}\alpha = -1$  olduğunu bilərək digər triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın.

8. Hesablayın:

a)  $\cos 120^\circ - \cos 150^\circ \sin 45^\circ - \cos^4 60^\circ$  ;

b)  $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{ctg} 150^\circ \cos 45^\circ - \cos 90^\circ \sin 20^\circ$  ;

c)  $\sin 120^\circ - \operatorname{tg} 150^\circ \sin 150^\circ - \operatorname{ctg}^4 45^\circ$  .



### § 38. İki bucaq cəmi və fərqinin triq. funksiyaları. İkiqat arqument düsturları

Aşağıdakı teorem və ondan çıxan nəticələrin isbatı ixtiyari üçbucaqda həyata keçirilir.

Teorem (*cəm və fərq düsturları haqqında*).

$0 < \alpha, \beta < 180^\circ$  şərinə ödəyən  $\alpha$  və  $\beta$  bucaqları üçün

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha .$$

$$2. \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta ;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta .$$

$$3. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} ; \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} .$$

**İsbatı.** Tutaq ki,  $\alpha$  və  $\beta$  iti bucaqlardır.  $\angle N = \alpha + \beta$  bucağını nəzərdən keçirək.

ND şüasını və bu şüaya perpendikulyar olan MK parçasını çəkək:  $\angle MND = \alpha$ ,  $\angle DNK = \beta$ . MNK üçbucağı və onun xaricinə çəkilmiş çevrəyə əsasən

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{a+b}{2R} = \frac{x \sin \alpha + y \sin \beta}{2R} = \sin \alpha \cdot \frac{x}{2R} + \sin \beta \cdot \frac{y}{2R} = \sin \alpha \cdot \sin \angle NKM +$$

$$+ \sin \beta \cdot \sin \angle NMK = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha ;$$

*Qeyd edək ki,  $\alpha$  və  $\beta$  bucaqlarından biri kor bucaq olduqda keçid düsturlarından istifadə edərək iti bucaq halına gəlmək mümkündür.*

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \sin(90^\circ - \alpha + \beta) = \sin(90^\circ - \alpha) \cos\beta + \sin\beta \cos(90^\circ - \alpha) =$$

$$= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \cos(90^\circ + \beta - \alpha) = \cos(90^\circ + \beta) \cos\alpha + \sin(90^\circ + \beta) \sin\alpha =$$

$$= -\sin\beta \cos\alpha + \sin\alpha \cos\beta = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha ;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(90^\circ - \alpha - \beta) = \sin(90^\circ - \alpha) \cos\beta - \sin\beta \cos(90^\circ - \alpha) =$$

$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  və  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ -nin tərifi dəki düsturlarını yazıb surət və məxrəci  $\cos\alpha \cos\beta$  hasilinə bölməklə 3-cü düsturları alırıq.

**Nəticə 1.**  $\alpha = \beta$  halında cəm düsturlarından *ikiqat arqument* düsturlarını alırıq:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \underline{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = \underline{1 - 2\sin^2\alpha} =$$

$$= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \underline{2\cos^2\alpha - 1} ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} ; \quad \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} ; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} ;$$

**Nəticə 2.** İkiqat arqument düsturlarında  $\alpha = \frac{x}{2}$  əvəzləməsi etsək, onda

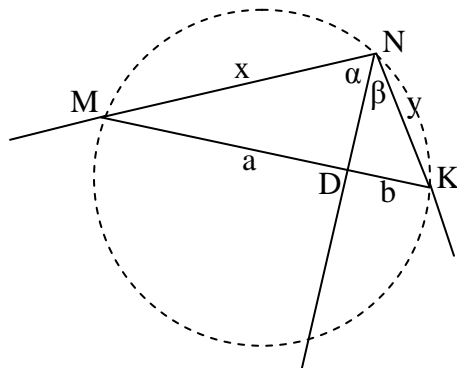
$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} ; \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 ;$$

**Nəticə 3.** *Dərəcəniendirmə düsturları* :

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} ; \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} ; \quad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} .$$

$$\text{Qeyd. } \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha} ; \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} .$$

$$\odot \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \dots = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha ; \quad \cos 3\alpha = \dots = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha .$$



### § 39. Cəmin və fərqi triq. funksiyalarına aid çalışmalar

1.  $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \dots$

2.  $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \dots$

3.  $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \dots$

4.  $\operatorname{ctg} 75^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \dots$

5.  $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \dots$

6.  $\cos 15^\circ = \dots$

7.  $\cos 105^\circ = \dots$

8.  $\operatorname{tg} 15^\circ = \dots$

9.  $\sin 12^\circ \cos 48^\circ + \sin 48^\circ \cos 12^\circ = \dots$

10.  $\sin 62^\circ \sin 2^\circ + \cos 62^\circ \cos 2^\circ = \dots$

11.  $\sin 12^\circ \cos 48^\circ - \sin 48^\circ \cos 12^\circ = \dots$

12.  $\cos 42^\circ \cos 48^\circ - \sin 48^\circ \sin 42^\circ = \dots$

13.  $\sin 12^\circ \cos 48^\circ + \sin 48^\circ \cos 12^\circ = \dots$

14.  $\frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 32^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 32^\circ} = \dots$

15.  $\frac{\operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 3^\circ}{1 + \operatorname{tg} 63^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ} = \dots$

16.  $2 \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ = \dots$

17.  $\cos 37,5^\circ \sin 37,5^\circ = \dots$

18.  $\frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \dots$

19.  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 22,5^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 22,5^\circ} = \dots$

20.  $\frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \dots$

21.  $\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \dots$

22.  $\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 86^\circ \operatorname{tg} 87^\circ \operatorname{tg} 88^\circ \operatorname{tg} 89^\circ = \dots$

23.  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \dots$

24.  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}, \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \dots$

4.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dots$

25.  $\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \dots$

26.  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \dots$

27.  $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \dots$

28.  $\sin 20^\circ + \cos 20^\circ \operatorname{tg} 35^\circ = \dots$

29.  $\cos 12^\circ - \cos 12^\circ \operatorname{ctg} 39^\circ = \dots$

30.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = \dots$

31.  $\operatorname{tg} \alpha = 2, \operatorname{tg} \beta = 3 \Rightarrow \alpha + \beta = \dots$

32. Eyni bir üçbucağın  $\alpha$  və  $\beta$  bucaqları üçün  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha + \beta = \dots$

33.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha - \beta = \dots$

34.  $\frac{\operatorname{tg} 80^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ} = \dots$

35.  $\alpha + \beta = 45^\circ, \alpha - \beta = 30^\circ \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} = \dots$

36.  $2 \sin 52,5^\circ \cos 52,5^\circ = \dots$

37.  $\cos 37,5^\circ \sin 37,5^\circ = \dots$

38.  $\frac{2\operatorname{tg} 37,5^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 37,5^\circ} = \dots$  ; 39.  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 52,5^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 52,5^\circ} = \dots$

40.  $\frac{3\operatorname{tg} 7,5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 7,5^\circ} = \dots$

## § 40. Cəmdən hasilə və hasildən cəmə keçid düsturları

İki bucaq cəmi və fərqinin **sinus** və **kosinus** düsturlarını nəzərdən keçirək.

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha .$$

Bu düsturları tərəf - tərəfə toplamaq və

$$1* \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\beta \cos\alpha$$

Burada  $\alpha + \beta = x$ ,  $\alpha - \beta = y$  əvəzləməsi  
Sinus və kosinus üçün cəmdən hasilə keçid

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

**Tangens** və **kotangens** üçün cəmdən hasilə keçid düsturları isə aşağıdakılardır:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} ;$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} ;$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} ;$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y} .$$

**İsbatı.** Təriflərə əsasən alırıq:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} ;$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} ;$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} ;$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y} .$$

**Hasildən cəmə keçmə düsturları**

1\* və 2\* düsturlarından **hasildən cəmə keçid** düsturlarını alırıq:

$$\sin\alpha \cos\beta = 0,5(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = 0,5(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin\alpha \sin\beta = 0,5(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

**Qeyd.**  $\sin x \pm \cos x$  şəklində olan cəmi hasilə çevirmək üçün  $\sin x \pm \cos x = \sin x \pm \sin(90^\circ - x)$  çevirmə düsturlarından istifadə edilir.

$$2. \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta ;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta .$$

çıxmaqla alırıq:

$$2* \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha \sin\beta$$

aparaqla ( $2\alpha = x + y$ ,  $2\beta = x - y$ )  
düsturlarını alırıq:

$$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ;$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} .$$

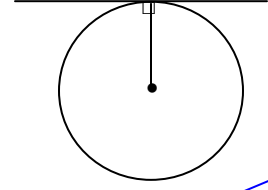
Çalışmalar

**Cəmi hasilə çevirin:**

1.  $\sin 40^\circ + \sin 100^\circ = 2\sin 70^\circ \cos 30^\circ = \sqrt{3} \sin 70^\circ$ ;
2.  $\sin 100^\circ - \sin 40^\circ = 2\sin 30^\circ \cos 70^\circ = \cos 70^\circ$ ;
3.  $\cos 40^\circ + \cos 100^\circ = 2\cos 70^\circ \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cos 70^\circ$ ;
4.  $\cos 100^\circ - \cos 40^\circ = -2\sin 70^\circ \sin 30^\circ = -\sin 70^\circ$ ;
5.  $\sin 40^\circ + \cos 10^\circ = \sin 40^\circ + \sin 80^\circ = \dots$ ;
6.  $\sin 40^\circ - \cos 10^\circ = \sin 40^\circ - \sin 80^\circ = \dots$ ;
7.  $0,5 + \cos 10^\circ = \cos 60^\circ + \cos 10^\circ = \dots$ ;
8.  $0,5 + \sin 20^\circ = \sin 30^\circ + \sin 20^\circ = \dots$ ;
9.  $1 + 2\cos 50^\circ = 2(\cos 60^\circ + \cos 50^\circ) = \dots$ ;
10.  $\sqrt{3} + 2\sin 70^\circ = 2(\sin 60^\circ + \sin 70^\circ) = \dots$ ;
11. a)  $1 - 2\cos 50^\circ$ ; b)  $1 - 2\sin 50^\circ$ ; c)  $1 + 2\sin 50^\circ$ .
12. a)  $\sqrt{2} - 2\cos 50^\circ$ ; b)  $\sqrt{2} - 2\sin 50^\circ$ ;  
c)  $\sqrt{2} + 2\sin 70^\circ$ . d)  $\sqrt{2} + 2\cos 80^\circ$ .
13. a)  $\sqrt{3} - 2\cos 50^\circ$ ; b)  $1 - 2\sin 70^\circ$ ;  
c)  $1 + 2\sin 80^\circ$ ; d)  $1 + \cos 10^\circ$
14. a)  $\sqrt{3} - 2\cos 50^\circ$ ; b)  $1 + \sin 50^\circ$ ;  
c)  $\sqrt{3} + 2\sin 50^\circ$ ; d)  $\sin 40^\circ - \cos 100^\circ$ .
15. a)  $1 + \cos 150^\circ$ ; b)  $1 - \sin 140^\circ$ ;  
c)  $\sqrt{3} + 2\sin 170^\circ$ ; d)  $\sin 140^\circ + \cos 10^\circ$ .
16.  $\operatorname{tg} 48^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ = \frac{\sin(48^\circ - 28^\circ)}{\cos 48^\circ \cos 28^\circ} = \dots$
17.  $\operatorname{tg} 48^\circ + \operatorname{tg} 28^\circ = \frac{\sin(48^\circ + 28^\circ)}{\cos 48^\circ \cos 28^\circ} = \dots$
18.  $\operatorname{ctg} 48^\circ - \operatorname{ctg} 28^\circ = -(\operatorname{ctg} 28^\circ - \operatorname{tg} 48^\circ) =$   
 $= \frac{\sin(48^\circ - 28^\circ)}{\sin 48^\circ \sin 28^\circ} = \dots$
19.  $\sqrt{3} + \operatorname{tg} 40^\circ = \dots$

## § 41. Toxunan, vətər və kəsənin xassələri

**1. Toxunma nöqtəsindən çəkilmiş radius toxunana perpendikulyardır.**



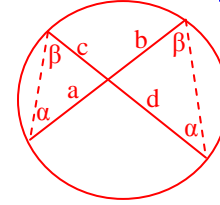
**2. Bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanlar bərabərdir. Bu nöqtəni mərkəzlə birləşdirən  $d/x$  parçası toxunanlar arasındakı bucağın tənbölənidir.**

Bu xassənin isbatı aşığardır.

**3. Teorem (vətlər haqqında). İki kəsişən vətərin hissələri hasiləri bərabərdir:**

$$ab = cd$$

**İsbatı:**  $c:\sin\alpha = a:\sin\beta \Rightarrow c:a = \sin\alpha : \sin\beta = b:d \Rightarrow ab=cd.$

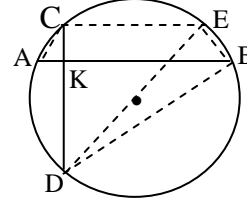


**4. Qarşılıqlı perpendikulyar iki kəsişən vətərin hissələrinin kvadratları cəmi diametrin kvadratına bərabərdir:**

$$AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 = DE^2$$

**İsbatı.**  $CE \parallel AB$  vətərini çəkək. Onda  $AC = EB$  olduğu üçün

$$DE^2 = DB^2 + EB^2 = DK^2 + KB^2 + AK^2 + CK^2.$$

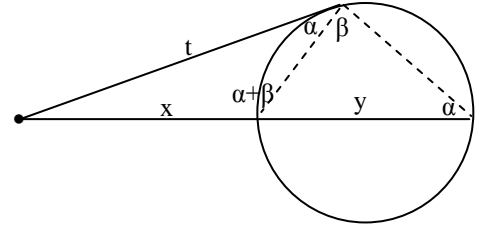


**5. Hər hansı bir nöqtədən çevrəyə toxunan (t) və kəsən ( $x+y$ ) çəkildikdə toxunanın kvadratı kəsənin xarici hissəsi ilə kəsənin hasilinə bərabərdir:**

$$t^2 = x(x+y)$$

**İsbatı.** Sinuslar teoreminə görə

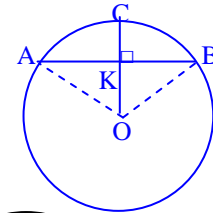
$$t : (x+y) = \sin\alpha : \sin(\alpha+\beta) = x : t \rightarrow t^2 = x(x+y).$$



**5. Vətərə perpendikular olan radius (parça) onu yarıya bölür:**

$$OC \perp AB \rightarrow AK = KB.$$

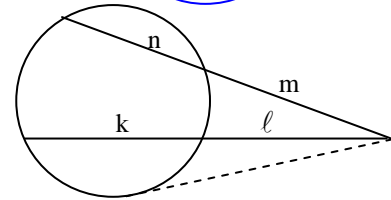
Bu xassə AOB bərabəryanlı  $\Delta$ -ğın xassəsindən alınır.



**Nəticə.** Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilmiş iki kəsən üçün aşağıdakı mülahizə doğrudur:

Bir kəsənin özü ilə xarici hissəsinin hasilini, digər kəsənin özü ilə xarici hissəsinin hasilinə bərabərdir:

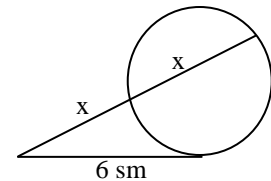
$$m(m+n) = l(l+k).$$



**Çalışma .** Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilmiş kəsənin xarici hissəsi çevrə daxilindəki hissəsinə bərabərdir. Bu nöqtədən çəkilmiş toxunan 6 sm-dir. Kəsən neçə sm-dir?

**Həlli.** Məlum xassəyə görə  $x \cdot 2x = 36 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}.$

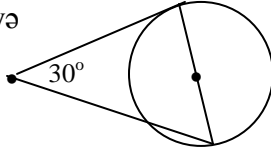
**Cavab:**  $6\sqrt{2}$  sm



## §42. Toxunan ,vətər və kəsənə aid çalışmalar

1. Radiusu 3 sm olan çevrə xaricindəki nöqtədən bu iki toxunan çəkilmişdir. Nöqtədən çevrənin mərkəzinə qədər məsafə 5 sm-dir. Toxunma nöqtələri arasındakı məsafə neçə sm-dir?

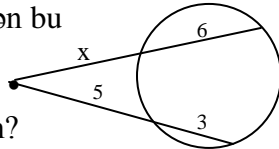
2. Radiusu  $\sqrt{3}$  sm olan çevrəyə bir nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasındakı bucaq  $30^\circ$ -dir. Şəkilə əsasən kəsənin çevrə xaricindəki hissəsini tapın.



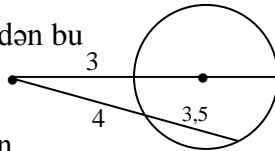
3. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə toxunan və kəsən çəkilmişdir. Toxunanın 4 sm, kəsənin çevrə daxilində və xaricində qalan hissələrinin bərabərdir. Kəsən neçə sm-dir?

4. Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasındakı bucaq  $60^\circ$ -dir. Toxunanın 3 sm, kəsənin 9 sm olduğunu bilərək çevrənin radiusunu tapın?

5. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki kəsən çəkilmişdir. Şəkildəki verilənlərə əsasən x-i tapın?

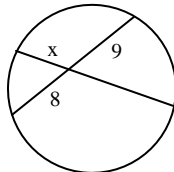


6. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki kəsən çəkilmişdir. Şəkildəki verilənlərə əsasən çevrənin radiusunu tapın?



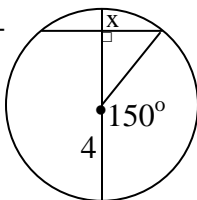
7. Çevrənin eyni bir nöqtəsindən qarşılıqlı perpendikulyar iki vətər çəkilmişdir. Vətərlərin 12 sm və 16 sm olduğunu bilərək çevrənin uzunluğunu tapın.

8. Çevrənin iki vətəri çəkilmişdir. Uzunluğu 18 sm olan vətər digər vətəri 8 sm və 9 sm-lik hissələrə bölür. 18 sm-lik vətərin kiçik hissəsi neçə sm-dir?



9. Çevrənin mərkəzindən vətərə qədər məsafə 5 sm-dir. Vətərin 24 sm olduğunu bilərək çevrənin diametrini tapın.

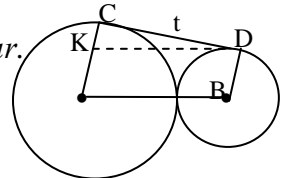
10. Şəkilə əsasən seqmentin hündürlüyünü(x) tapın.



11.  $KD \parallel AB$ ,  $CD$ - toxunandır. İsbat edin ki,  $t^2 = 4Rr$

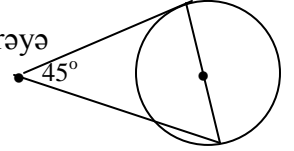
İsbatı. KCD düzbucaqlı  $\Delta$ -dan alırıq:

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + t^2 \rightarrow t^2 = 4Rr.$$



12. Radiusları 1 sm və 9 sm olan çevrələr xaricən toxunur. Ortaq toxunan neçə sm-dir?

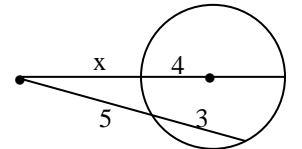
13. Radiusu 7 sm olan çevrəyə bir nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasındakı bucaq  $45^\circ$ -dir. Şəkilə əsasən kəsənin çevrə daxilindəki hissəsini tapın.



14. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə toxunan və kəsən çəkilmişdir. Toxunanın 6 sm, kəsənin çevrə daxilində və xaricində qalan hissələri nisbəti 1:2 kimidir. Kəsən neçə sm-dir?

15. Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövsləri  $155^\circ$  və  $85^\circ$ , kəsənin çevrə daxilində qalan hissəsi  $\sqrt{3}$  sm-dir. Çevrənin radiusu neçə sm-dir?

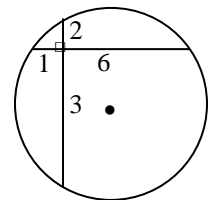
16. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki kəsən çəkilmişdir. Şəkildəki verilənlərə əsasən x parçasını tapın?



17. Çevrənin eyni bir nöqtəsindən qarşılıqlı perpendikulyar iki vətər çəkilmişdir. Vətərlərin çevrənin mərkəzindən məsafələri 12 sm və 16 sm olduğunu bilərək çevrənin diametrini tapın.

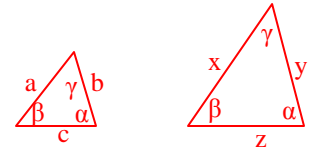
18. Çevrənin iki vətəri çəkilmişdir. Uzunluğu 24 sm olan vətər digər vətəri 9 sm və 6 sm-lik hissələrə bölür. Böyük vətərin hissələri nisbətini tapın.

19. Şəkilə əsasən çevrənin diametrini tapın.



## § 43. Oxşar üçbucaqlar

**Tərif.** Bir üçbucağın üç bucağı digər üçbucağın üç bucağına bərabər və uyğun tərəfləri nisbəti eyni olan iki üçbucağa oxşar  $\Delta$ -lar deyilir:  
 $a:x = b:y = c:z$



**Oxşarlığın birinci əlaməti.**

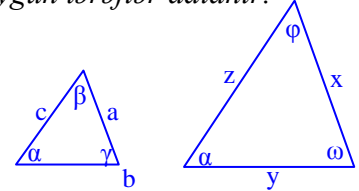
**Bir  $\Delta$ -in iki bucağı digər  $\Delta$ -in iki bucağına bərabər olarsa, belə  $\Delta$ -lar oxşardır.**

**İsbatı.**  $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma = x:y:z \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a:x = b:y = c:z.$

**Qeyd.** Bərabər bucaqlar qarşısındakı tərəflər uyğun tərəflər adlanır.

**Oxşarlığın ikinci əlaməti.**

**Bir  $\Delta$ -in iki tərəfinin digər  $\Delta$ -in iki tərəfinə nisbəti eyni olub bu tərəflər arasındakı bucaqlar bərabər olarsa, belə  $\Delta$ -lar oxşardır.**



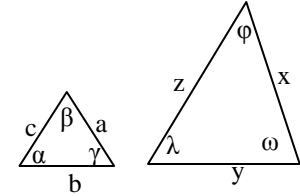
**İsbatı.**  $c:z = b:y \rightarrow c:b = z:y \rightarrow \sin\gamma : \sin\beta = \sin\omega:\sin\phi;$   
 Sin -lar teoreminə görə  $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma =$   
 $= \sin\alpha:\sin\phi:\sin\omega = x:y:z ; \beta = \phi , \gamma = \omega.$

**Oxşarlığın 3-cü əlaməti.**

**Bir üçbucağın üç tərəfi digər üçbucağın üç tərəfi ilə mütənəsibdirsə, bu üçbucaqlar oxşardır:**

$$a:b:c = x:y:z$$

**İsbatı.** Tutaq ki,  $\alpha \neq \lambda$ . Şərtə görə  $b:c = y:z$ , onda 2-ci əlamətə görə bu  $\Delta$ -lar oxşar ola bilməz, yəni  $a:b:c \neq x:y:z$ . Bu isə şərtə ziddir. Deməli,  $\alpha = \lambda$ . Eyni qayda ilə  $\beta = \phi, \gamma = \omega$ .

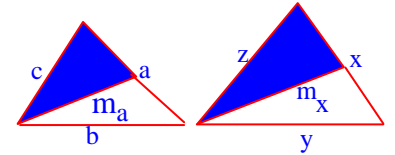


**Nəticə 1. Oxşar  $\Delta$ -ların perimetrlər, medianlar, tən bözlər, hündürlüklər nisbəti uyğun olaraq tərəflər nisbətinə bərabərdir.**

**İsbatı.**  $a:x = b:y = c:z = k \quad a = xk, b = yk, c = zk$  olduğundan  
 $(a+b+c):(x+y+z) = (xk+yk+zk):(x+y+z) = k.$

Oxşarlığın 2-ci əlamətinə görə şəkildəki kölgəli  $\Delta$ -lar oxşardır, yəni

$$m_a : m_x = c : z$$



Eyni mühakimələrlə tən bözlər və hündürlüklər nisbətinin uyğun tərəflər nisbətinə bərabərliyi isbat olunur.

**Nəticə 2. Oxşar  $\Delta$ -ların sahələri nisbəti uyğun tərəflər nisbətinin kvadratına bərabərdir.**

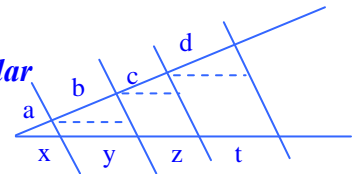
**İsbatı.** Sol və sağdakı  $\Delta$ -ların sahələrini uyğun olaraq  $S_2, S_1$ ;  $a$  və  $x$  tərəfləri qarşısındakı bucağı  $\alpha$  ilə işarə edək. Onda  $S_2/S_1 = 0,5bc \sin\alpha : (0,5yz \sin\alpha) = b/y \cdot c/z = (b/y)^2$

**Teorem (mütənəsib parçalar haqqında).** Bucağın tərəflərini paralel  $d/x$ -lərlə kəsəndə tərəflər üzərində ayrılan uyğun parçalar nisbəti bərabərdir:

$$a : b : c : d = x : y : z : t \Leftrightarrow a : x = b : y = c : z = d : t$$

**İsbatı.** Bir tərəf üzərindəki bölgü nöqtələrindən bucağın digər tərəfinə paralellər çəksək alınan üçbucaqlar oxşar olduğundan  
 $a : b = x : y ; b : c = y : z ; c : d = z : t.$

Buradan da yuxarıdakı nisbətlər alınır.

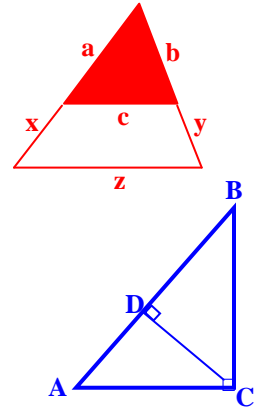


## § 44. Oxşarlıq əlamətlərinə aid çalışmalar

Tədqiqat üçün çalışma nümunələri

**1. Üçbucağın bir tərəfinə paralel çəkilmiş  $d/x$  bu  $\Delta$ -a oxşar üçbucaq ayırır.**

Bu xassə oxşarlığın 1-ci əlamətindən alınır:  $a:(a+x) = b:(b+y) = c:z$  ( $c \parallel z$ ).



**2. Düzbucaqlı  $\Delta$ -da düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlük bu üçbucağı oxşar  $\Delta$ -lara ayırır:  $\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta BDC$ .**

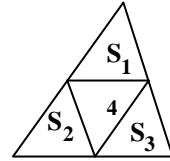
Bu xassə oxşarlığın 1-ci əlamətindən alınır.

**3. Üçbucağın orta xətləri bu  $\Delta$ -ı dörd bərabər sahəli  $\Delta$ -lara bölür.**

**İsbatı.** İkinci nəticəyə görə təpələrə bitişik  $\Delta$ -ların sahələri böyük  $\Delta$ -ın sahəsinin ( $S$ )  $\frac{1}{4}$  hissəsinə bərabərdir. Onda  $S_4 = S - 3 \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} S$ .

**4. Üçbucağın orta xətləri bu  $\Delta$ -ı dörd bərabər  $\Delta$ -a bölür.**

Bu xassənin isbatı  $\Delta$ -ların bərabərlik əlamətlərindən alınır.

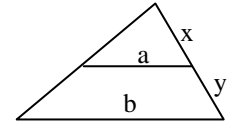


**Çalışma 1.** Şəkilə  $a \parallel b$ .  $x : y$  nisbətini tapın.

Üçbucaqların oxşarlığına görə  $a : b = x : (x+y)$ .

$x : y = k$  işarə edək. Onda  $\frac{a}{b} = \frac{k}{1+k} \rightarrow a + ak = bk \rightarrow$

$\rightarrow a = bk - ak \rightarrow k = \frac{a}{b-a}$ . **Cavab:**  $x : y = \frac{a}{b-a}$ .



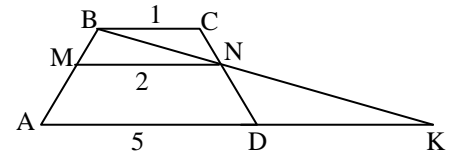
**Çalışma 2.** ABCD trapesiyasında MN parçası oturacaqlara paraleldir.  $BC = 1$  sm,  $MN = 2$  sm,  $AD = 5$  sm.  $DK = ?$

**Həlli.** Çalışma 1-dəki xassəyə görə

$BN : NK = 2 : (5 - 2) = 2 : 3$ .

$BNC$  və  $NDK$  üçbucaqları oxşar olduğundan

$BC : DK = BN : NK \Rightarrow 1 : DK = 2 : 3 \Rightarrow DK = 1,5$ .



### Çalışmalar

1. Sahələri nisbəti 4:9 olan iki bərabərtərəfli üçbucağın uyğun perimetrləri nisbətini tapın.

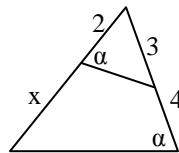
3. Sahələri nisbəti 1:2 olan iki oxşar üçbucağın uyğun medianları nisbətini tapın.

5. Perimetrləri nisbəti 1:4 olan iki oxşar üçbucağın uyğun tərəfləri nisbətini tapın.

7. Tərəfləri nisbəti 4:9 olan iki bərabərtərəfli üçbucağın uyğun perimetrləri nisbətini tapın.

9. Perimetrləri nisbəti 1:4 olan iki oxşar üçbucağın uyğun tərəfləri nisbətini tapın.

11. Şəkilə əsasən  $x$  -i tapın



13. Şəkiləki kiçik üçbucağın sahəsi böyük üçbucağın sahəsindən neçə dəfə kiçikdir?

2. Təpə bucaqları bərabər, perimetrləri nisbəti 1:3 olan iki bərabəryanlı uyğun üçbucağın oturacaqları nisbətini tapın.

4. Perimetrləri nisbəti 3:4 olan iki oxşar üçbucağın uyğun tən bölənləri nisbətini tapın.

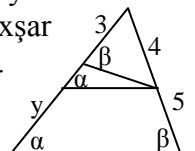
6. Sahələri nisbəti 9:25 olan iki oxşar üçbucağın uyğun hündürlüklər nisbətini tapın.

8. Tərəfləri nisbəti 5:12 olan iki bərabərtərəfli üçbucağın uyğun orta xətləri nisbətini tapın.

10. Perimetrləri 6 sm, 14 sm olan iki oxşar üçbucağın uyğun sahələri nisbətini tapın.

12. Böyüyünün sahəsini  $36 \text{ sm}^2$ , böyük tərəfləri nisbətini isə 2:3 olan iki oxşar üçbucağın kiçiyinin sahəsini tapın.

14. Şəkilə əsasən  $y$  -i tapın

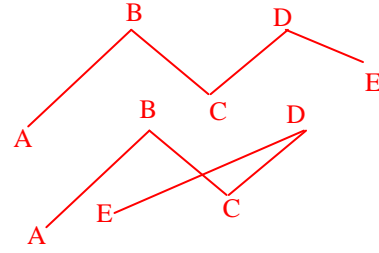


## § 45. Dördbucaqlılarla ilkin tanışlıq. Sınıq xətlər

**Sınıq xətlər.**  $A, B, C, D, E$  nöqtələrini qeyd edək və  $AB, BC, CD, DE$  parçalarını nəzərdən keçirək, belə ki,  $AB$  və  $BC$ ,  $BC$  və  $CD$ ,  $CD$  və  $DE$  **qonşu parçaları** bir düz xətt üzərində deyil.

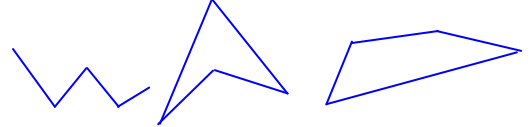
**Bu qayda ilə ardıcıl birləşdirilmə ilə alınan  $ABCDE$  fiquruna sınıq xətt deyilir.**

$A, B, C, D, E$  nöqtələri sınıq xəttin **təpə nöqtələri**,  $AB, BC, CD, DE$  parçaları onun **tərəfləri**,  $A$  və  $E$  nöqtələri isə **uc nöqtələri** adlanır.

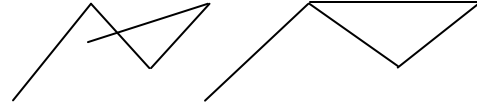


Ortaq təpəli tərəflər **qonşu tərəflər**, bir tərəfin uclarındakı təpələr isə sınıq xəttin **qonşu təpələri** adlanır.

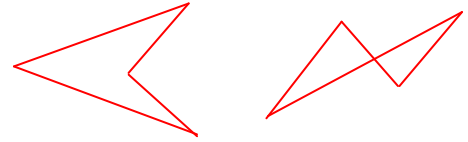
**Qonşu olmayan tərəflərinin ortaq nöqtələri olmayan (uc və ya daxili) sınıq xətt sadə sınıq xətt adlanır.**



**Qonşu olmayan tərəflərinin ortaq nöqtələri olan sınıq xətt özünü kəsən sınıq xətt adlanır.**



**Uc nöqtələri üst-üstə düşən sınıq xəttə qapalı sınıq xətt deyilir.**



**Yuxarıda dördtərəfli sınıq xəttə tərif verilmişdir.**

*İkitərəfli, üçtərəfli və s. n-tərəfli sınıq xətlərə, onların elementləri və növlərinə də eyni qayda ilə tərif verilir.*



## Dördbucaqlılar

**Tərif: Dördtərəfli sadə qapalı sınıq xəttin əmələ gətirdiyi müstəvi fiquruna dördbucaqlı deyilir.**

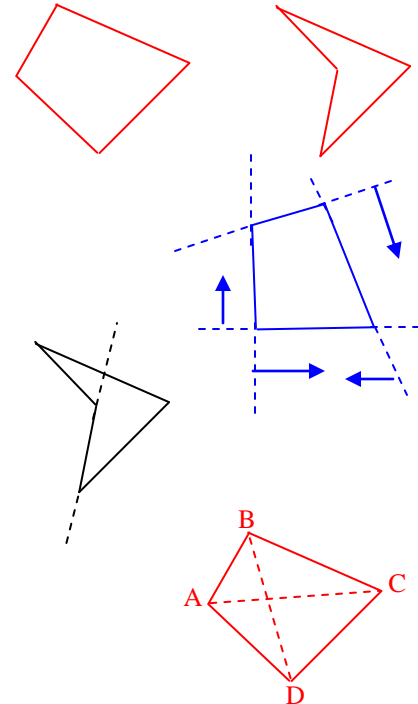
Dördbucaqlını əmələ gətirən sınıq xəttin təpələri bu dördbucaqlının təpələri, tərəflər isə dördbucaqlının tərəfləri adlanır.

**İxtiyari bir tərəfini saxlayan düz xəttədən bir tərəfdə qalan dördbucaqlı qabarıq dördbucaqlı adlanır.**

Hər hansı bir tərəfini saxlayan düz xətlə iki hissəyə ayrılan dördbucaqlı **çökük dördbucaqlı** adlanır.

Qonşu tərəflər arasındakı bucaqlara dördbucaqlının **daxili bucaqları**, daxili bucaqların qonşu bucaqlarına dördbucaqlının **xarici bucaqları** deyilir.

**Qonşu olmayan təpələri birləşdirən  $d/x$  parçasına dördbucaqlının diaqonalı ( $AC$  və  $BD$ ) deyilir.**  
**Bütün tərəflərin cəmi dördbucaqlının perimetri adlanır.**



**Gələcək şərhimizdə yalnız qabarıq dördbucaqlıları nəzərdən keçirəcəyik!**

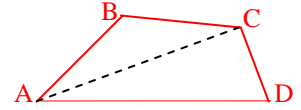


## § 46. Dördbucaqlının xassələri

Bu paraqrafda ixtiyari dördbucaqlının xassələri öyrənilir.

### 1. Daxili bucaqlarının cəmi $360^\circ$ -dir ;

**İsbatı.** ABCD dördbucaqlısının daxili bucaqlarının cəmi ABC və ACD üçbucaqlarının daxili bucaqlarının cəminə bərabər olduğundan bu cəm  $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ -dir.



### 2. Dördbucaqlının ixtiyari bir tərəfi qalan tərəflərinin cəmindən kiçikdir:

$$AD < AC + CD < AB + BC + CD$$

Digər tərəflər üçün də uyğun bərabərsizlikləri yazmaq olar.

### 3. Sahəsi diaqonallar hasilinin yarısı ilə bu diaqonallar arasındakı bucağın sinusu hasilinə bərabərdir:

$$S = 0,5 AC \cdot BD \sin \alpha .$$

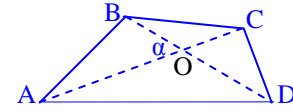
**İsbatı.** Şəkilə əsasən dördbucaqlının sahəsi

$$S = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \sin \alpha + \frac{1}{2} AO \cdot OD \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} OB(AO + OC) \sin \alpha + \frac{1}{2} OD(OC + AO) \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} (AO + OC) (OB + OD) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$$



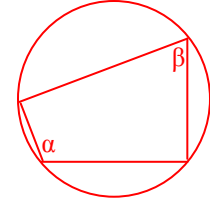
**Tərif:** Dördbucaqlının bütün təpələrindən keçən çevrəyə dördbucaqlı xaricinə çəkilmiş çevrə, belə dördbucaqlıya isə çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlı deyilir.

### 4. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi $180^\circ$ -dir.

**İsbatı.** Şəkildəki  $\alpha$  və  $\beta$  bucaqları daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğundan  $2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$ .

Tərs mülahizə də doğrudur:

**Dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi  $180^\circ$  olarsa, onda bu dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar.**



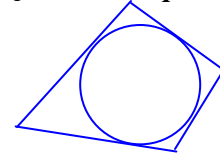
### 5. Dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkilmişdirsə, onda qarşı tərəflərin cəmi bərabərdir.

Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır. Tərs mülahizə də doğrudur:

**Dördbucaqlının qarşı tərəflərin cəmi bərabərdirsə, onda bu dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək olar.**

### 6. Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının sahəsini $S = pr$ düsturu ilə hesablamaq olar, burada $p$ - dördbucaqlının yarımperimetri, $r$ - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

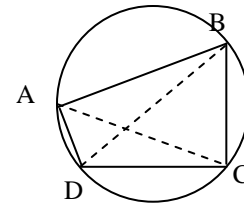
**Tərif:** Dördbucaqlının bütün tərəflərinə toxunan çevrəyə daxilə çəkilmiş çevrə, belə dördbucaqlıya isə çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlı deyilir.



### 7. Ptolemey teoremi. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin hasiləri cəmi onun diaqonallarının hasilinə bərabərdir:

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

### 8. Tərəfləri $a, b, c, d$ olan daxilə çəkilmiş dördbucaqlının sahəsi $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ düsturu ilə hesablanır, burada $p$ - perimetrin yarısıdır.



## §47. Çalışmalar

1. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının bucaqlarından biri  $30^\circ$ , bu bucaq qarşısındakı diaqonalı 15 sm-dir. Çevrənin diametrini tapın.

2. Tərəfləri müəyyən ardıcılıqla verilmiş hansı dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək olar?  
A) 3,4,5,6 B) 4,7,8,5 C) 4,5,7,8 D) 7,7,7,8 E) 7,8,9,9

3. İki qarşı bucağı verilmiş hansı dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar?  
A)  $110^\circ, 110^\circ$  B)  $85^\circ, 125^\circ$  C)  $145^\circ, 100^\circ$   
D)  $126^\circ, 74^\circ$  E)  $99^\circ, 81^\circ$

4. Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının perimetri 50 sm, çevrənin radiusu 6 sm-dir. Dördbucaqlının sahəsini hesablayın.

5. Dördbucaqlının uzunluğu 10 sm olan diaqonalı qarşı tərələrdən 5 sm və 7 sm məsafədədir. Onun sahəsini tapın.

6. Dördbucaqlının üç ardıcıl bucağı 2:2:4 nis - bətində, dördüncü bucağı isə  $40^\circ$ -dir. Böyük bucağı tapın.

7. Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının tərəfləri müəyyən ardıcılıqla 1 sm, 2 sm, 3 sm və 4 sm-dir. Diaqonallar arasındakı bucağın sinusunu tapın

13. Ptolemey teoremini isbat edin:

**Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin hasiləri cəmi onun diaqonallarının hasilinə bərabərdir:**

$$ac + db = d_1 \cdot d_2$$

**İsbatı.** ABCD dördbucaqlısında AC diaqonalına DE və BK perpendikulyarlarını endirək. Şəkilə əsasən

$$2S_{ABCD} = AC \cdot DE + AC \cdot BK = DE \cdot (AK + KC) + BK \cdot (AE + EC) = DE \cdot AK + DE \cdot KC + BK \cdot AE + BK \cdot EC.$$

Sonuncu ifadədə  $DE = d \sin \gamma$ ,  $AK = b \cos \alpha$ ;  $DE = a \sin \beta$ ,  $KC = c \cos \varphi$ ;  $BK = c \sin \varphi$ ,  $AE = a \cos \beta$ ;  $BK = b \sin \alpha$ ,  $EC = d \cos \gamma$  bərabərliklərini nəzərə alsaq, onda

$$2S_{ABCD} = db(\sin \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma) + ac(\sin \beta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \beta) = ac \sin(\beta + \varphi) + db \sin(\gamma + \alpha) = (ac + db) \sin(\gamma + \alpha) = (ac + db) \sin \omega.$$

Digər tərəfdən  $2S_{ABCD} = AC \cdot BD \sin \omega$ ,  $AC = d_1$  və  $BD = d_2$  işarə etsək

$$d_1 \cdot d_2 = ac + db$$

bərabərliyini alırıq ki, bunun da isbatı tələb olunurdu.

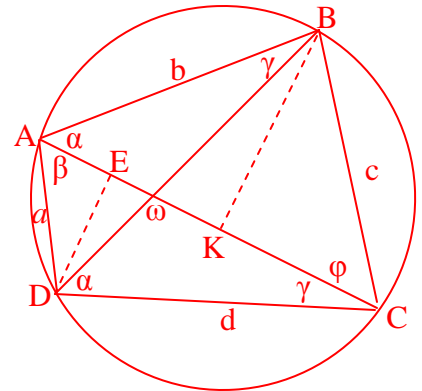
8. Dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrinin ardıcıl birləşdirilməsindən alınan dördbucaqlının perimetri 50 sm, dördbucaqlının diaqonalları cəmini tapın.

9. Dördbucaqlının sahəsi  $80 \text{ sm}^2$ , diaqonalları isə 20 sm və 16 sm-dir. Diaqonallar arasındakı bucağı tapın.

10. Dördbucaqlının diaqonalları 6 sm və 9 sm, onlar arasındakı bucaq isə  $60^\circ$ -dir. Onun sahəsini tapın.

11. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının bucaqlarından biri  $30^\circ$ , bu bucaq qarşısındakı diaqonalı 45 sm-dir. Uzunluğu  $30\sqrt{2}$  sm olan digər diaqonal qarşısındakı böyük bucağı tapın.

12. Diaqonalları fərqi 10 sm olan dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrinin ardıcıl birləşdirilməsindən alınan dördbucaqlının perimetri 80 sm-dir. Böyük diaqonalı tapın



## § 48. Paraleloqramın xassələri

**Tərif:** *Qarşı tərəfləri cüt-cüt bərabər və paralel olan dördbucaqlıya paraleloqram deyilir.*

**Elementləri:** dörd bucağı, dörd tərəfi, iki diaqonalı, iki hündürlüyü, perimetri və sahəsi.

**Növləri:** düzbucaqlı, kvadrat, romb, ixtiyari paraleloqram

**Paraleloqramın xassələri:**

1. *Qarşı tərəfləri bərabər və paraleldir;*
2. *Qarşı bucaqlar bərabərdir;*
3. *Diaqonallar kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür;*
4. *Bir tərəfə bitişik bucaqların cəmi  $180^\circ$ -dir;*
5. *Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi paraleloqramın simmetriya mərkəzidir, yəni  $O$  kəsişmə nöqtəsindən keçən ixtiyari  $MN$  düz xətti üçün  $OM = ON$ .*

**6. Diaqonal bu fiquru iki bərabər üçbucağa bölür;**

Yuxarıdakı xassələrin hər birinin isbatı  $\Delta$ -ların bərabərlik əlamətlərindən alınır.

**7. Diaqonallar bu fiquru dörd bərabər sahəli üçbucağa bölür;**

**İsbati:**  $d_1 : 2 = x$ ,  $d_2 : 2 = y$  işarə edək, onda sahə düsturlarına görə diaqonalların ayırdığı üçbucaqlardan hər birinin sahəsi  $\frac{1}{2}xy$ sinə düsturu ilə hesablandığına görə bu dörd  $\Delta$ -ın sahələri bərabərdir.

**8. Diaqonalların kvadrları cəmi tərəflərin kvadrları cəminə bərabərdir:**  $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ ;

**İsbati:** cos-lar teoreminə görə

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha, \quad b^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha.$$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplayıb  $2x = d_1$ ,  $2y = d_2$  yazsaq

$$a^2 + b^2 = 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = 4x^2 + 4y^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

**9. Perimetri:**  $P = 2a + 2b = 2(a + b)$ ;

$$\text{Sahəsi: } S = ah_a = bh_b = ab\sin\beta = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha;$$

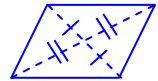
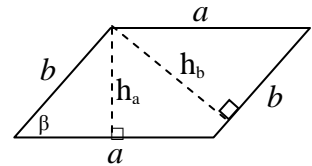
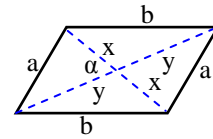
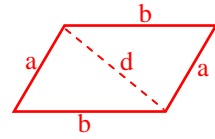
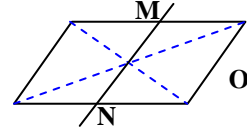
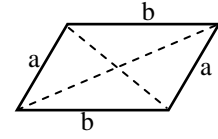
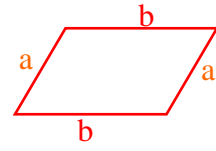
**10. Qarşı tərəflər arasındakı məsafə uyğun hündürlüyə bərabərdir.**

Paraleloqramın əsas əlamətləri

**1. Diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünən dördbucaqlı paraleloqramdır.**

**2. Simmetriya nöqtəsi olan dördbucaqlı paraleloqramdır.**

Bu əlamətlərin isbatı  $\Delta$ -ların bərabərlik əlamətlərindən alınır.



## §49. Çalışmalar

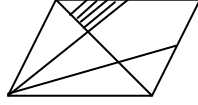
1. ABCD paraleloqramında AC və BD diaqonal-ları O nöqtəsində kəşişir. AOB, BOC, COD və AOD üçbucaqları üçün hansı mülahizələr doğrudur:

1. Bu üçbucaqlar bərabərdir;
  2. Bu üçbucaqların sahələri bərabərdir;
  3. Qonşu üçbucaqlar bərabərdir;
  4. Qarşı üçbucaqlar bərabərdir;
  5. Qonşu üçbucaqların sahələri bərabərdir;
- A) 1,2,3 B) 2,4,5 C) 3,4,5 D) 2,3,4 E) 1,3,5

2. "İxtiyari dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrinin ardıcıl birləşdirilməsindən alınan dördbucaqlı ..." - mülahizəsinin doğru məntiqi davamını hansı fiqur tamamlayır?

- A) kvadrat B) romb C) düzbucaqlı  
D) paraleloqram E) ixtiyari dördbucaqlı

3. Paraleloqramın təpəsi qarşı tərəflərin ortası ilə birləşdirilmişdir. Ştrixlənmiş üçbucağın sahəsi  $2 \text{ sm}^2$ -dir. Paraleloqramın sahəsi neçə  $\text{sm}^2$ -dir.



- A) 18 B) 24 C) 36 D) 20 E) 28

4. ABCD paraleloqramında  $AC = 5 \text{ sm}$ ,  $BD = 7 \text{ sm}$ ,  $AB = 4 \text{ sm}$ . BC tərəfini tapın.

5. ABCD paraleloqramında  $AB = 5 \text{ sm}$ ,  $BC = 6 \text{ sm}$ ,  $AC = 7 \text{ sm}$ . Paraleloqramın sahəsini tapın.

6. ABCD paraleloqramında  $AB = 5 \text{ sm}$ ,  $BC = 6 \text{ sm}$ ,  $AC = 7 \text{ sm}$ . Paraleloqramın kiçik hündürlüyünü tapın.

7. Sahəsi  $12 \text{ sm}^2$  olan ABCD paraleloqramında  $AC = 6 \text{ sm}$ ,  $BD = 8 \text{ sm}$ . Diaqonallar arasındakı bucağı tapın.

8. ABCD paraleloqramında  $AC = 8\sqrt{5} \text{ sm}$ ,  $BD = 16 \text{ sm}$ ,  $BC = 12 \text{ sm}$ . Paraleloqramın sahəsini tapın.

9. ABCD paraleloqramında AC diaqonalı A bucağının tən bölməsi və  $BC = 12 \text{ sm}$ . Paraleloqramın perimetrini tapın.

10. ABCD paraleloqramında AC diaqonalı A bucağının tən bölməsidir.  $AC = 12 \text{ sm}$  və  $BD = 16 \text{ sm}$ . AB tərəfi neçə sm-dir?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

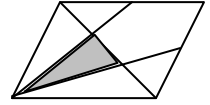
11. ABCD dördbucaqlısında AC və BD diaqonal-ları kəşişmə nöqtəsində yarıya bölünür. Neçə hökm doğrudur?

1. Bu dördbucaqlı düzbucaqlıdır;
  2. Bu dördbucaqlı kvadrat ola bilər;
  3. Bu dördbucaqlı paraleloqramdır;
  4. Bu dördbucaqlı düzbucaqlı ola bilər;
  5. Bu dördbucaqlı rombduur;
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. "Simmetriya mərkəzi olan dördbucaqlı ..." - hökmünün ən doğru məntiqi davamını hansı fiqur tamamlayır?

- A) kvadrat B) romb C) düzbucaqlı  
D) paraleloqram E) ixtiyari dördbucaqlı

13. Paraleloqramın təpəsi qarşı tərəflərin ortası ilə birləşdirilmişdir. Paraleloqramın sahəsi  $36 \text{ sm}^2$ -dir. Kölgəli üçbucağın sahəsi neçə  $\text{sm}^2$ -dir.



- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

14. ABCD paraleloqramında  $AC = 11 \text{ sm}$ ,  $BC = 7 \text{ sm}$ ,  $AB = 6 \text{ sm}$ . BD diaqonalını tapın.

15. ABCD paraleloqramında  $BC = 15 \text{ sm}$ , BC və AD tərəfləri arasındakı məsafə  $8 \text{ sm}$ -dir. Paraleloqramın sahəsini tapın.

16. ABCD paraleloqramında A bucağının tən bölməsi BC tərəfini  $4 \text{ sm}$  və  $7 \text{ sm}$ -lik parçalara bölür. Paraleloqramın perimetrini tapın.

17. ABCD paraleloqramında A bucağının tən bölməsi ilə B bucağının tən bölməsi K nöqtəsində kəşişir.  $AK = 4 \text{ sm}$ ,  $BK = 7 \text{ sm}$ . ABK üçbucağının sahəsini tapın.

18. Sahəsi  $24\sqrt{3} \text{ sm}^2$  olan ABCD paraleloqramında  $AB = 6 \text{ sm}$ ,  $AD = 8 \text{ sm}$ . A bucağını tapın.

## §50. Paraleloqramın xüsusi növlərinin xassələri

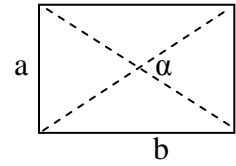
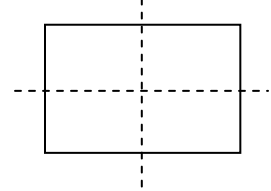
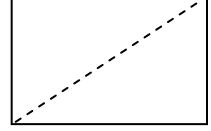
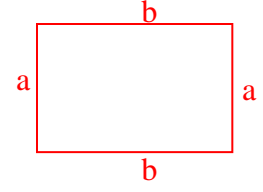
### Düzbucaqlı

**Tərif:** *Qarşı tərəfləri bərabər və hər bir bucağı düz bucaq olan dördbucaqlıya düzbucaqlı deyilir.*

Tərifdən aydındır ki, düzbucaqlı həm də paraleloqramdır. Beləliklə, düzbucaqlı ixtiyari dördbucaqlı və paraleloqramın xassələrinə malik olmaqla yanşı özüməməxsus xassələrə də malikdir. Düzbucaqlının əsas xassələri aşağıdakılardır:

1. Qarşı tərəfləri cüt-cüt bərabərdir;
2. Hər bir bucağı  $90^\circ$ -dir;
3. Diaqonalları bərabərdir;
4. Diaqonalı onu iki bərabər düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
5. Diaqonalları onu bərabər sahəli dörd üçbucağa ayırır;
6. İki simmetriya oxu vardır ki, onlar da qarşı tərəflərin orta perpendikulyarıdır.
7. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi düzbucaqlının simmetriya mərkəzidir; bu nöqtədə diaqonallar yarıya bölünür;
8.  $d^2 = a^2 + b^2$ ,  $d$  - diaqonaldır;
9.  $S = ab$ ;  $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$ ;  $P = 2a + 2b = 2(a + b)$ .

**Diaqonalları bərabər olan paraleloqram düzbucaqlıdır.**



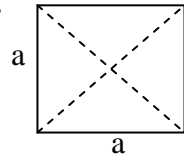
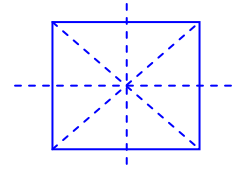
\*\*\*\*\*

### Kvadrat

**Tərif:** *Bütün tərəfləri bərabər olan düzbucaqlıya kvadrat deyilir.*

1. Hər bir bucağı  $90^\circ$ , bütün tərəfləri bərabərdir;
2. Diaqonalları bərabər və perpendikulyardır;
3. Diaqonalı qarşı bucaqların tən bölənidir.
4. Diaqonalı onu iki bərabər bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
5. Diaqonalları onu dörd bərabər bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
6. Dörd simmetriya oxu vardır: iki diaqonal və tərəflərin orta perpendikulyarı;
7.  $S = a^2$ ;  $S = \frac{1}{2} d^2$ ;  $P = 4a$  ( $d$  - diaqonaldır).

**Diaqonalları perpendikulyar olan düzbucaqlı kvadratdır.**



\*\*\*\*\*

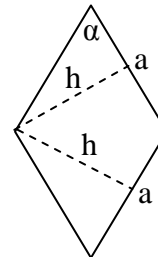
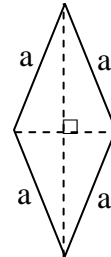
### Romb

**Tərif:** *Bütün tərəfləri bərabər olan paraleloqrama romb deyilir.*

Tərifdən aydındır ki, kvadrat həm də rombdur.

**Xassələri:**

1. Bütün tərəflər bərabərdir;
2. Diaqonalları perpendikulyardır;
3. Diaqonalı onu iki bərabər bərabəryanlı üçbucağa ayırır;
4. Diaqonalları onu dörd bərabər düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
5. Diaqonalları onun simmetriya oxlarıdır;
6. Diaqonal qarşı bucaqların tən bölənidir;
7. Bütün hündürlükləri bərabərdir;
8.  $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ ,  $d_1, d_2$  - diaqonallardır;
9.  $S = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$ ;  $P = 4a$ .



## 51. Paraleloqramın növlərinə aid çalışmalar

1. Aşağıdakılardan hansılar yanlıştır?

- 1) Kvadrat düzbucaqlıdır;
- 2) Paraleloqram düzbucaqlıdır;
- 3) Romb kvadrat ola bilər;
- 4) Paraleloqram rombduur;
- 5) Paraleloqram trapesiya ola bilər.

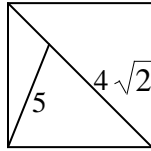
2. Diaqonalı 7 sm, perimetri 18 sm olan düzbucaqlının sahəsini tapın.

3. Tərəfləri 3 sm və  $3\sqrt{3}$  sm olan düzbucaqlının diaqonalları arasındakı bucağı tapın.

4. Üç eyni kvadratın bitişməsindən alınan düzbucaqlının perimetri kvadratların perimetrləri cəmindən 8 vahid kiçikdir. Kvadratın tərəfini tapın.



5. Kvadratın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbətini tapın.



6. Şəkildəki verilənlərə görə kvadratın tərəfini tapın.

7. Aşağıdakılardan hansılar doğrudur:

- 1) Kvadratın dörd simmetriya oxu var;
- 2) Paraleloqramın simmetriya mərkəzi yoxdur;
- 3) Rombun dörd simmetriya oxu var;
- 4) Paraleloqramın simmetriya oxu ola bilər;
- 5) Düzbucaqlının iki simmetriya oxu var?

8. Böyük diaqonalı 14 sm olan rombun bir tərəsindən çəkilmiş hündürlüklər arasındakı bucaq  $60^\circ$ -dir. Rombun sahəsini tapın.

9. Kiçik diaqonalı 6 sm, daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu  $\sqrt{5}$  sm olan rombun perimetrini tapın.

10. Tərəfləri 12 sm və 16 sm olan düzbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələri ardıcıl olaraq birləşdirilmişdir. Alınan paraleloqramın perimetrini tapın.

11. Rombun daxilinə çevrə, çevrənin daxilinə isə bərabərtərəfli üçbucaq çəkilmişdir. Romb və üçbucağın hündürlükləri nisbətini tapın.

12. Kvadratın sahəsini üç dəfə artırmaq üçün onun tərəfini neçə faiz artırmaq lazımdır?

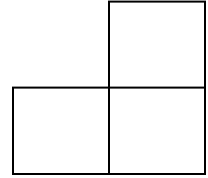
13. Aşağıdakılardan hansılar doğrudur?

- 1) Kvadratın xaricinə çevrə çəkmək olar;
- 2) Kvadratın daxilinə çevrə çəkmək olar;
- 3) Rombun xaricinə çevrə çəkmək olar ;
- 4) Düzbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar;
- 5) Rombun daxilinə çevrə çəkmək olar .

14. Diaqonalı 8 sm, sahəsi  $18 \text{ sm}^2$  olan düzbucaqlının eni neçə sm-dir?

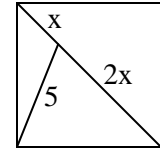
15. Diaqonalı 6 sm və sahəsi  $9\sqrt{3} \text{ sm}^2$  olan düzbucaqlının diaqonalları arasındakı bucağı tapın.

16. Üç eyni kvadratın bitişməsindən alınan fiqurun perimetrinin kvadratların perimetrləri cəminə nisbətini tapın.



17. Rombun daxilinə çevrə, çevrənin daxilinə isə düzbucaqlı çəkilmişdir. Rombun hündürlüyünün düzbucaqlının diaqonalına nisbətini tapın

18. Şəkildəki verilənlərə görə x parçasını tapın.



19. Kiçik diaqonalı 10 sm olan rombun bir tərəsindən çəkilmiş hündürlüklər arasındakı bucaq  $60^\circ$ -dir. Rombun tərəfini tapın.

20. Böyük diaqonalı 20 sm, daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 6 sm olan rombun sahəsini tapın.

21. Kvadratın daxilinə çevrə, çevrənin daxilinə bərabərtərəfli üçbucaq, bu üçbucağın daxilinə isə çevrə çəkilmişdir. Çevrələrin radiuslar nisbətini tapın.

22. Kvadratın perimetrini 20% artırıdıda onun sahəsi  $44 \text{ sm}^2$  artdı. Kvadratın tərəfi neçə sm-dir?

23. Düzbucaqlının enini 20% artırıb, uzunluğunu 10% azaltsaq onun sahəsi necə dəyişər?

24. Diaqonalı 5 sm olan düzbucaqlının uzunluğunu 25% azaldıb kvadrat aldılar. Kvadratın perimetrini tapın.

## §52. Trapesiya və onun xassələri

**Tərif:** İki tərəfi paralel və digər iki tərəfi paralel olmayan dördbucaqlıya trapesiya deyilir.

**Elementləri:** dörd bucağı, iki oturacağı (paralel tərəflər), yan tərəfləri, hündürlük, diaqonallar, perimetr və sahəsi.

**Növləri:** Bərabəryanlı, düzbucaqlı və ixtiyari trapesiya.



Bərabəryanlı trapesiya



Düzbucaqlı trapesiya

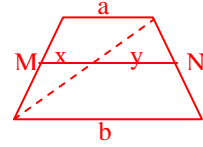


İxtiyari trapesiyalar

**Trapesiyanın orta xətti** (yan tərəflərin ortasını birləşdirən parça) oturacaqlara paralel olub onların cəminin yarısına bərabərdir:

$$MN = (a+b)/2.$$

**İsbatı.**  $MN = x + y = a/2 + b/2 = (a + b)/2.$



### Trapesiyanın xassələri

**1. Yan tərəflərə bitişik bucaqların cəmi 180°-dir;**

**2. Yan tərəflərə bitişik bucaqların tənbölgələri perpendikulyardır;**

**3. Diaqonallar trapesiyanı dörd Δ-a bölür ki, onlardan ikisi (oturacaqlara bitişiklər) oxşar, digər ikisinin sahələri bərabərdir;**

**4. Sahəsi iki düsturla hesablanır:**

$$S = 0,5(a + b)h = 0,5 d_1 d_2 \sin \alpha$$

**İsbatı.** Şəkildən aydındır ki,  $S = \frac{1}{2} bh + \frac{1}{2} ah = (a+b)h/2;$

İkinci düstur dördbucaqlının sahə düsturundan alınır.

### Çalışma nümunələri

**1.** Trapesiyanın tərəflərinin 4sm, 4sm, 4sm və 8sm olduğunu bilərək onun iti bucağını tapın.

**Həlli.** Kor bucaq tərəfindən yan tərəfə paralel parça çəkək.

Yandakı üçbucaq bərabərtərəfli olduğundan iti bucaq 60°-dir.

**2.** ABCD trapesiyasında C kor bucaq tərəfindən çəkilən CK parçası bu trapesiyanı iki bərabərsahəli fiqura ayırır. AD = 9 sm, BC = 5 sm olduğunu bilərək AK:KD nisbətini tapın.

**Həlli.** Şərtə görə  $\frac{AK + BC}{2} \cdot h = \frac{KD}{2} \cdot h \Rightarrow AK + BC = KD \Rightarrow$

$$\Rightarrow AK + 5 = 9 - AK \Rightarrow 2 AK = 4 \Rightarrow AK = 2, KD = 7. \text{Cavab: } 2/7.$$

**3.** ABCD düzbucaqlı trapesiyasında oturacaqlara  $\perp$  olan yan tərəf  $AD = \sqrt{3}$  sm, kiçik oturacaq AB = 2 sm,  $BD \perp BC$  olduğunu bilərək böyük oturacağı tapın.

**Həlli.**  $BD^2 = AD^2 + AB^2 = 3 + 4 = 7$ ,  $BD \perp BC$  olduğundan

$$BD^2 = DK \cdot DC \Rightarrow 2 \cdot DC = 7. \text{Cavab: } DC = 3,5 \text{ sm.}$$

**4.** Bərabəryanlı trapesiyanın (AB=CD) diaqonalı 5 sm, hündürlüyü 4 sm-dir.

Trapesiyanın sahəsini tapın.

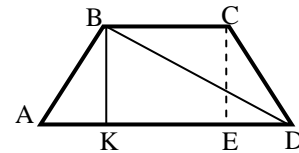
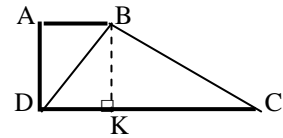
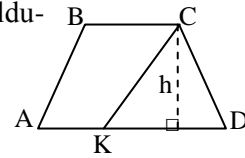
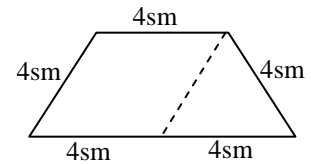
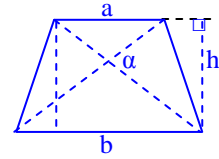
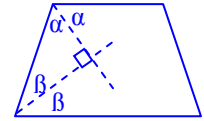
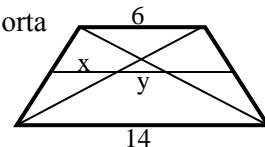
**Həlli.**  $KD^2 = BD^2 - BK^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow KD = 3$ ,  $BC = KE = x$  işarə edək. Onda  $AK = ED = 3 - x \Rightarrow AD = AK + KD = 3 - x + 3 = 6 - x$ .

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{x + 6 - x}{2} \cdot 4 = 12. \text{Cavab: } 12 \text{ sm}^2.$$

**5.** Oturacaqları 6 sm və 14 sm olan trapesiyanın diaqonalları ilə orta xəttinin kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

**Həlli.** Üçbucağın orta xəttinin xassəsinə görə  $x = 6/2 = 3$ ,

$$x + y = 14/2 = 7 \Rightarrow y = 7 - 3 = 4. \text{Cavab: } y = 4 \text{ sm.}$$



### §53. Çalışmalar

1. Böyük oturacağı 8 sm olan bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı  $4\sqrt{3}$  sm olub yan tərəfə perpendikulyardır. Trapesiyanın sahəsini tapın.

2. Trapesiyanın oturacaqları 17 sm və 9 sm-dir. Trapesiyanın diaqonalları ilə orta xəttin kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

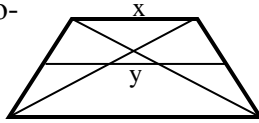
3. Trapesiyanın oturacaqları 4 sm və 6 sm, diaqonalları isə 8 sm və 6 sm-dir. Diaqonallar arasındakı bucağı tapın.

4. Bərabəryanlı trapesiyanın oturacaqları  $4\sqrt{2}$  sm və  $8\sqrt{2}$  sm, diaqonalları isə qarşılıqlı perpendikulyardır. Trapesiyanın yan tərəfini tapın.

5. Trapesiyanın daxilinə radiusu 5 sm olan çevrə çəkilmişdir. Trapesiyanın orta xətti onun hündürlüyünə bərabərdir. Trapesiyanın perimetrini tapın.

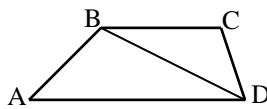
6. İti bucağı  $60^\circ$  olan trapesiyanın xaricinə radiusu  $5\sqrt{3}$  sm olan çevrə çəkilmişdir. Trapesiyanın diaqonallını tapın.

7. Trapesiyanın orta xətti və diaqonalları çəkilmiş və  $y:x = x:9$ .  
Kiçik oturacağı tapın.



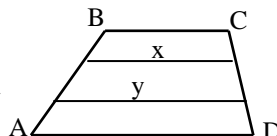
8. Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı  $4\sqrt{3}$  sm olub böyük oturacaqla  $30^\circ$ -li bucaq əmələ gətirir. Kiçik oturacağın hündürlüyə bərabər olduğunu bilərək trapesiyanın sahəsini tapın.

9. ABCD trapesiyanın oturacaqları 4 sm və 9 sm,  $\angle ABD = \angle C$ .  
BD diaqonalını tapın.



10. Böyük oturacağı 8 sm olan bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı yan tərəfə perpendikulyardır. Trapesiyanın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrimini tapın.

11. Trapesiyanın oturacaqları 7 sm və 11 sm-dir. Oturacaqlara paralel olan x və y parçaları yan tərəfləri üç bərabər hissəyə bölür. Bu parçaların cəmini tapın.

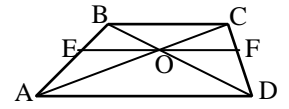


12. Trapesiyanın oturacaqları 17 sm və 9 sm, yan tərəfləri 5 sm və 7 sm-dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

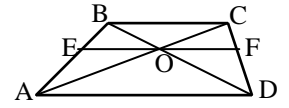
13. Trapesiyanın oturacaqları 3:5 nisbətindədir. Trapesiyanın diaqonalı orta xətti hansı nisbətdə bölür?

14. Oturacaqları 10 sm və 16 sm olan trapesiyanın yan tərəflərini birləşdirən parça oturacaqlara paralel olub yan tərəfləri 2:3 nisbətdə bölür. Həmin parça neçə sm-dir?  
(iki hala baxın)

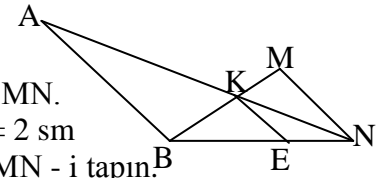
15. Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən oturacaqlara paralel EF parçası çəkilmişdir. EO : OF nisbətini tapın.



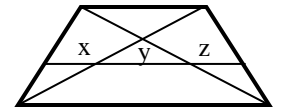
16. Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən oturacaqlara paralel EF parçası çəkilmişdir. BC = 4 sm, AD = 6 sm olduğunu bilərək EO parçasını tapın.



17. Şəkilə  $AB \parallel KE \parallel MN$ .  
AB = 5 sm, KE = 2 sm olduğunu bilərək MN - i tapın.



18. Oturacaqları 3 sm və 7 sm olan trapesiyanın oturacaqlarına paralel olan parça üç hissəyə bölünmüşdür:  $x = y - z$ .  
 $x:y:z$  nisbətini tapın.



19. İsbat edin ki, trapesiyanın orta xətti oturacaqları birləşdirən ixtiyari parçanı yarıya bölür.

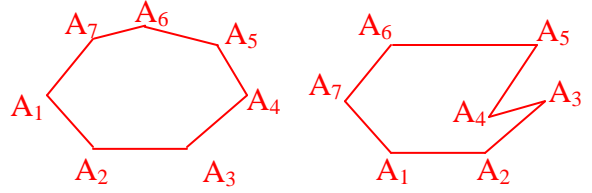
20. İsbat edin ki, ixtiyari trapesiyanın yan tərəfləri uzantılarının kəsişmə nöqtəsi, oturacaqların orta nöqtələri və diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi (dörd nöqtə) eyni bir düz xətt üzərindədir.



## § 54. Çoxbucaqlılar

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$  nöqtələrini nəzərdən keçirək, belə ki, ixtiyari üç ardıcıl nöqtə bir düz xətt üzərində deyil.

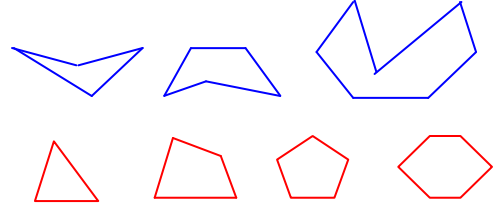
**Tərif:** *Təpələri  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$  nöqtələrində olan sadə qapalı sınıq xəttin əmələ gətirdiyi müstəvi fiquruna çoxbucaqlı deyilir.*



$n = 7$  olduqda sadə qapalı sınıq xətlər

Çoxbucaqlını əmələ gətirən sınıq xəttin təpələri bu çoxbucaqlının **təpələri**, tərəflər isə onun **tərəfləri** adlanır.

*Hər hansı bir tərəfini saxlayan düz xətlə iki hissəyə ayrılan çoxbucaqlı çökük çoxbucaqlı adlanır.*

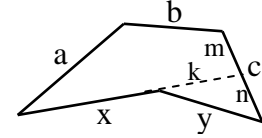


*İxtiyari bir tərəfini saxlayan düz xəttədən bir tərəfdə qalan çoxbucaqlı qabarıq çoxbucaqlı adlanır.*

**Qeyd.** Çökük  $n$ -bucaqlının çökük hissəsindəki tərəflərin cəmi qabarıq hissəsindəki tərəflərin cəmindən kiçikdir:

$$x + y < a + b + c$$

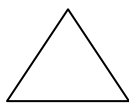
**İsbatı.**  $x$  tərəfinin uzantısı ilə  $c$  tərəfinin kəsişməsində alınan parçaları  $m$  və  $n$  işarə edək. Onda şəkilə əsasən  $x + y < x + k + n < a + b + m + n = a + b + c$



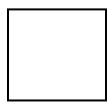
**$n$ -bucaqlının elementləri:**  $n$  tərəfi,  $n$  bucağı, perimetri, sahəsi, diaqonalları.  
 **$n$ -bucaqlının növləri:** düzgün  $n$ -bucaqlı, ixtiyari  $n$ -bucaqlı.

**Tərif:** *Qonşu olmayan təpələri birləşdirən  $d/x$  parçasına diaqonal deyilir. Bütün tərəflərinin cəminə çoxbucaqlının perimetri deyilir. Bütün bucaqları və bütün tərəfləri bərabər olan  $n$ -bucaqlıya düzgün  $n$ - bucaqlı deyilir.*

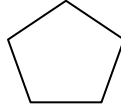
**Düzgün  $n$ -bucaqlıya aid nümunələr:**



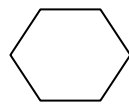
**Bərabərtərəfli üçbucaq**



**kvadrat**



**düzgün 5-bucaqlı**

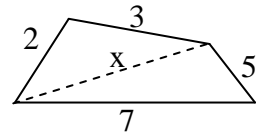


**düzgün və s. 6-bucaqlı**

...

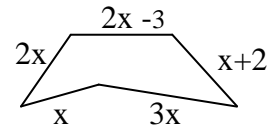
**Çalışma 1.** Şəkildəki dördbucaqlının  $x$  diaqonalının natural ədəd olduğunu bilərək onun ən böyük qiymətini tapın.

**Həlli.** Üçbucaq bərabərsizliyinə görə  $7 - 5 < x < 2 + 3 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x_{\max} = 4$ .



**Çalışma 2.** Şəkildəki beşbucaqlının perimetrinin 53 sm olduğunu bilərək ən böyük tərəfi tapın.

**Həlli.**  $P = x + 2x + 2x - 3 + x + 2 + 3x = 53 \Rightarrow 9x - 1 = 53 \Rightarrow x = 6$ .  
**Cavab:** 18 sm

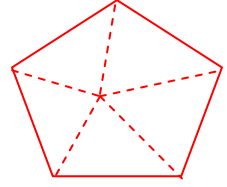


**Gələcək şərhimizdə yalnız qabarıq çoxbucaqlıları nəzərdən keçirəcəyik!**

## § 55. Çoxbucaqlıların xassələri

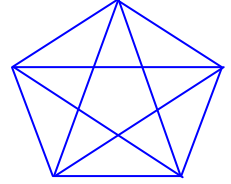
**1. İstənilən  $n$ -bucaqlının daxili bucaqlarının cəmi  $\alpha_n = 180^\circ(n-2)$ .**

**İsbati:**  $n$ -bucaqlının daxilində ixtiyari bir nöqtə götürüb onu təpələrlə birləşdirək. Alınan  $n$  sayda üçbucağın daxilibucaqlarının cəmi  $180^\circ \cdot n$  olacaqdır. Şəkildən aydındır ki,  $180^\circ \cdot n = \alpha_n + 360^\circ$ ,  $\alpha_n = 180^\circ(n-2)$ .



**2.  $n$ -bucaqlının hər təpəsindən çıxan diaqonallarının sayı  $n - 3$ , bütün diaqonallarının sayı isə  $n(n-3):2$  düsturu ilə hesablanır.**

**İsbati.**  $n$ -bucaqlının hər təpəsindən çıxan diaqonalların sayı  $n - 3$  olduğu üçün  $n(n - 3)$  hasili bütün diaqonalların iki mislidir, çünki  $n$ -bucaqlının bütün diaqonallarını saydıqda hər diaqonal iki dəfə sayılmış olur.



**3. Düzgün  $n$ -bucaqlının hər bir daxili bucağı  $\alpha = 180^\circ(n-2):n$ .**

**4. Hər təpədə bir xarici bucaq götürməklə istənilən  $n$ -bucaqlının xarici bucaqlarının cəmi  $\beta_n = 360^\circ$ .**

**İsbati.** Hər təpədə bir cüt qonşu bucaq olduğu üçün  $\beta_n = 180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ$ .

**5.  $n$ -bucaqlının perimetri( $P$ ) daxilə çəkilmiş çevrənin uzunluğundan böyük, xaricə çəkilmiş çevrənin uzunluğundan kiçikdir:**

$$2\pi r < P < 2\pi R$$

**6. Daxilinə çevrə çəkilməklə bilən (məsələn, düzgün  $n$ -bucaqlı)  $n$ -bucaqlının sahəsi  $S = pr$ , burada  $p = P/2$ .**

Bu xassənin isbatı üçbucaqdakı kimi aparılır.

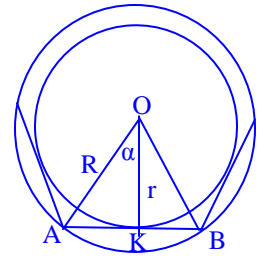
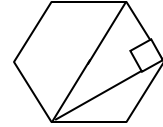
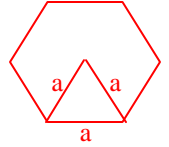
**7. Düzgün 6-bucaqlının bir təpəsindən çıxan iki diaqonal və tərəf düzbucaqlı üçbucaq əmələ gətirir.**

**8. İstənilən düzgün  $n$ -bucaqlının daxilinə və xaricinə çevrə çəkmək olar, belə ki, bu çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür. Tərəf və radiuslar üçün aşağıdakılar doğrudur:**

$$r^2 + (a/2)^2 = R^2, \sin \alpha = a/(2R), \alpha = 180^\circ/n;$$

burada  $a = AB$  -  $n$ -bucaqlının tərəfi,  $R = AO$  xaricə çəkilmiş,  $r = OK$  - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

**Düzgün 6-bucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu onun tərəfinə bərabərdir.**



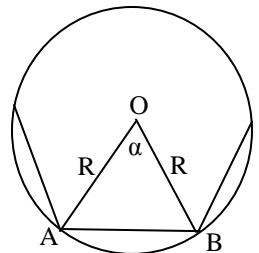
**9. Oxşar çoxbucaqluların perimetrlər nisbəti uyğun tərəflər nisbətinə, sahələr nisbəti isə uyğun tərəflər nisbətinin kvadratına bərabərdir.**

**Qeyd:** Bir çoxbucaqlının bütün daxili bucaqları digər çoxbucaqlının bütün daxili bucaqlarına bərabər olub, uyğun tərəflər nisbəti eyni olan çoxbucaqlılar **oxşar çoxbucaqlılar** adlanır.

**Çalışma.** Düzgün 12-bucaqlının sahəsi  $192 \text{ sm}^2$ -dir. Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

$$\text{Həlli. } \alpha = 360^\circ : 12 = 30^\circ \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 30^\circ = \frac{R^2}{4}$$

$$\text{Digər tərəfdən } S = 12 \cdot S_{AOB} = 192 \Rightarrow 3R^2 = 192 \Rightarrow R = 8 \text{ sm.}$$



## §56. Çalışmalar

1. 12-bucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.
2. Daxili bucaqlarının cəmi  $3600^\circ$  olan çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.
3. Çoxbucaqlının hər tərəsindən 12 diaqonal çıxır. Onun daxili bucaqlarının cəmi neçə dərəcədir?
4. Daxili bucaqlarının cəmi  $2700^\circ$  olan çoxbucaqlının diaqonallarının sayını tapın.
5. Çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 54-dür. Onun tərəflərinin sayını tapın.
6. Hansı düsturlar düzgün n-bucaqlıya aiddir:  
1)  $4r^2 + a^2 = 4R^2$  ; 2)  $r^2 + a^2 = R^2$  ;  
3)  $a = 2R \sin \frac{360^\circ}{n}$  ; 4)  $a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$  ?  
burada  $a$  - tərəf,  $r, R$  - daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin radiuslarıdır.
7. Düzgün çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 90-dır. Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?
8. Düzgün çoxbucaqlının hər tərəsindən çıxan diaqonallarının sayı 22-dir. Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?
9. Düzgün altıbucaqlının sahəsi  $54\sqrt{3}$  sm<sup>2</sup>-dir. Onun böyük diaqonalı neçə sm-dir?
10. Düzgün altıbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbətini tapın.
11. Düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbəti 1:2 kimidir. Çoxbucaqlının daxili bucağı neçə dərəcədir?
12. Düzgün onbucaqlının perimetri 120 sm-dir. Onun daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
13. Düzgün 12-bucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu  $6\sqrt{2}$  sm-dir. Onun sahəsini tapın.
14. Düzgün 12-bucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu  $2\sqrt{2}$  sm-dir. Onun sahəsini tapın.
15. 18-bucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.
16. Daxili bucaqlarının cəmi  $5400^\circ$  olan çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.
17. Çoxbucaqlının hər tərəsindən 18 diaqonal çıxır. Onun daxili bucaqlarının cəmi neçə dərəcədir?
18. Daxili bucaqlarının cəmi  $1800^\circ$  olan çoxbucaqlının diaqonallarının sayını tapın.
19. Çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 65-dür. Onun tərəflərinin sayını tapın.
20. Hansı düsturlar düzgün n-bucaqlıya aiddir?  
1)  $a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha$  ; 2)  $S = 0,5nR^2 \sin \alpha$  ;  
3)  $P = 2Rn \sin \alpha$  ; 4)  $P = 2Rn \sin \alpha$  ?  
burada  $a$  - tərəf,  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$  ;  $r, R$  - daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin radiuslarıdır.
21. Düzgün çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 77-dır. Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?
22. Düzgün çoxbucaqlının hər tərəsindən çıxan diaqonallarının sayı 25-dir. Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?
23. Düzgün altıbucaqlının sahəsi  $36\sqrt{3}$  sm<sup>2</sup>-dir. Onun böyük diaqonalı neçə sm-dir?
24. Düzgün altıbucaqlının perimetri 48 sm-dir. Onun sahəsini tapın.
25. Düzgün altıbucaqlının kiçik diaqonalı 3 sm, böyük diaqonalı 5 sm-dir. Onun perimetrini tapın.
26. Düzgün 12-bucaqlının perimetri 96 sm-dir. Onun ən böyük diaqonalı neçə sm-dir?
27. Düzgün 12-bucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu  $2\sqrt{3}$  sm-dir. Onun ən kiçik diaqonalı neçə sm-dir?
28. Düzgün 8-bucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu  $3\sqrt{2}$  sm-dir. Onun xaricinə çəkilmiş çevrənin uzunluğunu tapın.

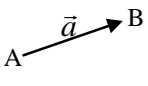
## §57. Vektorlar


- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| 1. Tərif və elementləri;          | 6. Vektorların skalyar hasilı;          |
| 2. Bərabər və əks vektorlar;      | 7. Vektorların uzunluğu, vahid vektor;  |
| 3. Kollinear (paralel) vektorlar; | 8. İki vektor arasındakı bucaq;         |
| 4. Vektorun ədədə vurulması;      | 9. Vektorların perpendikulyarlıq şərti. |
| 5. Vektorların cəmi və fərqi;     | 10. Vektorların kollinearlıq şərti.     |


### Koordinatlırsız vektorlar


**Tərif:** İstiqamətlənmiş parçaya

**vektor** deyilir ( $\vec{AB} = \vec{a}$ )

Elementləri: başlanğıcı (A), sonu (B),  uzunluğu (modulu və ya mütləq qiyməti,  $|\vec{a}|$ ).


Uzunluqları **bərabər**, istiqamətləri **eyni** olan vektorlara **bərabər vektorlar** deyilir. 

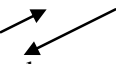
Uzunluqları **bərabər**, istiqamətləri **əks** olan vektorlara **əks vektorlar** deyilir. 

**Paralel** d/x-lər üzərində olan vektorlara **kollinear vektorlar** deyilir. 

Kollinear vektorlar eyni və ya əks istiqamətli olurlar.

#### Vektorun ədədə vurulması

Vektoru ( $\vec{a}$ ) müsbət ədədə ( $\lambda > 0$ ) vurmaq üçün onun uzunluğunu bu ədədə vurub **istiqamətini saxlamaq** lazımdır ( $\lambda \vec{a}$ ). 

Vektoru mənfi ədədə vurmaq üçün onun uzunluğunu bu ədədin moduluna vurub istiqamətini **əksinə dəyişmək** lazımdır. 

Aydın ki,  $\vec{a}$  və  $\lambda \vec{a}$  vektorları kollinearlır.

İki vektoru **toplamaq** (çıxmaq) üçün üçbucaq və ya paraleloqram qaydasından istifadə olunur:



$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}; \quad \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$$

İki vektorun skalyar hasilı:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha, \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Vektorların **perpendikulyarlıq şərti**:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = ac + bd = 0.$$

### Koordinatlarla verilən vektorlar

$\vec{x}$  vektorunun başlanğıcı koordinat başlanğıcında olduqda onun son nöqtəsinin koordinatları bu vektorun koordinatları adlanır və  $\vec{x} (a; b)$

(və ya  $\vec{x} = (a; b)$ ) kimi işarə olunur.

**Vektorun başlanğıcı koordinat başlanğıcında olmadıqda**  $\vec{x} = (b-a; d-c)$ .

Uğun koordinatları eyni olan vektorlar **bərabər vektorlar** adlanır.

Koordinatları əks ədədlər olan vektorlar **əks vektorlar** adlanır:

$$\vec{x} (a; b) \text{ və } \vec{y} (-a; -b)$$

Vektoru **ədədə vurmaq** üçün onun koordinatlarını bu **ədədə vurmaq** lazımdır:

$$\lambda \vec{x} = (\lambda a; \lambda b)$$

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \text{ şərtini ödəyən } \vec{a} (a_1, a_2) \text{ və}$$

$\vec{b} (b_1, b_2)$  vektorlarına **kollinear vektorlar** (paralel) deyilir. Koordinatlarla yazılış:

$$b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2.$$

Vektorları **toplamaq** üçün onların uyğun koordinatlarını **toplamaq**, vektorları **çıxmaq** üçün onların uyğun koordinatlarını **çıxmaq** lazımdır. Məs.  $\vec{x} (a; b)$  və  $\vec{y} (c; d)$  vektorları üçün  $\vec{x} \pm \vec{y} = (a \pm c; b \pm d)$ .

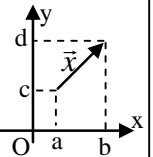
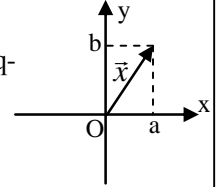
İki vektorun skalyar hasilı:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ac + bd; \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = a^2 + b^2$$

Vektorun uzunluğu:  $|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

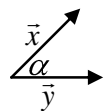
$\vec{x} (a; b)$  və  $\vec{y} (c; d)$  vektorlarının

**kollinearlıq** (paralellik) şərti:  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ .



İki vektor arasındakı bucaq düsürü:  $\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}};$

**Qeyd:** Uzunluğu **vahidə** bərabər olan vektora **vahid vektor** deyilir. Koordinat oxlarının vahid vektorlarını  $\vec{u}(1; 0)$  və  $\vec{v}(0; 1)$  ilə işarə etsək, onda  $\vec{x}(a; b) = a\vec{u} + b\vec{v}$ .



## §58. Müstəvidə koordinat metodu

### Tərif və anlayışlar

Düzbucaqlı koordinat sistemində A nöqtəsinin absis oxu (**ox**) üzərindəki **proyeksiyasına**(a) bu nöqtənin **absisi**(a),ordinat oxu (**oy**) üzərindəki **proyeksiyasına**(b) bu nöqtənin **ordinatı**(b) deyilir və A(a;b) kimi işarə olunur (O(0;0) *koordinat başlanğıcıdır*).

Aydındır ki, **absisi sıfır** olan ixtiyari nöqtə(C) **ordinat oxu** üzərində(*b ədədinə uyğun yerdə*), **ordinatı sıfır** olan ixtiyari nöqtə(D) isə **absis oxu** üzərindədir(*a ədədinə uyğun yerdə*).

Ucları A(a;b) və B(c;d) olan **parçasının uzunluğu**  $\vec{AB}$  (c-a;d-b) vektorunun uzunluğuna bərabər olduğundan

$$AB = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}.$$

Bu düstur həm də **iki nöqtə arasındakı məsafə** düsturu adlanır. AB parçasının **orta nöqtəsinə** C(x;y) ilə işarə etsək,onda

$$x = \frac{a+c}{2}, \quad y = \frac{b+d}{2}$$

**İsbatı.**  $\vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AB}$  bərabərliyini koordinatlarla yazsaq

$$x-a = \frac{1}{2}(c-a), \quad y-b = \frac{1}{2}(d-b) \rightarrow x = \frac{a+c}{2}, \quad y = \frac{b+d}{2}$$

### Çevrənin tənliyi

Çevrə **mərkəz** adlanan nöqtədən **bərabər məsafədə** olan (x;y) nöqtələr çoxluğu olduğu üçün

$$R = AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Sonuncu bərabərlik **mərkəzi (a;b) nöqtəsində**, **radiusu R olan çevrənin tənliyidir**.

Xüsusi halda(a=0,b=0), **mərkəzi koordinat başlanğıcında**,radiusu R olan çevrənin tənliyi  $x^2 + y^2 = R^2$  şəklindədir.

### Düz xəttin tənliyi

Düzbucaqlı koordinat sistemində **ordinatının absisinə nisbəti** sabit olan nöqtələr çoxluğunu nəzərdən keçirək.Bu çoxluqdakı nöqtələr **düz xətt** əmələ gətirir,çünkü

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const} \rightarrow \alpha = \operatorname{const}.$$

Sabit ədədi **k** ( $\operatorname{tg} \alpha = k$ ) ilə işarə etsək,  $y = kx$  tənliyini alırıq.

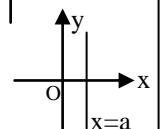
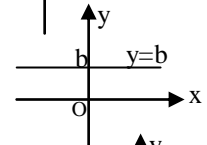
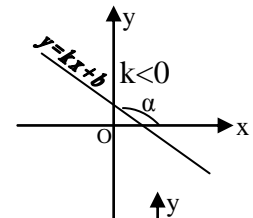
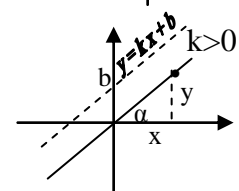
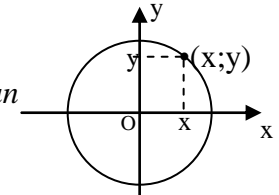
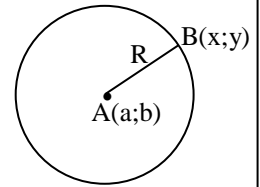
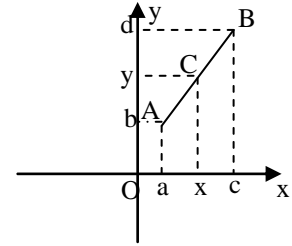
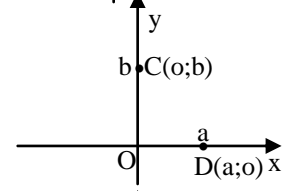
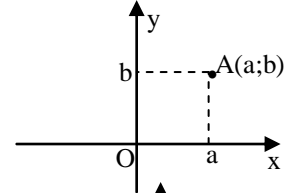
**Sonuncu tənlik** koordinat başlanğıcından keçən **d/x-in tənliyi** adlanır.

$y = kx$  d/x-nə paralel olub oy oxunu **b** ədədinə uyğun nöqtədə kəsən düz xəttin tənliyi  $y = kx + b$  şəklindədir.

**k** əmsalı düz xəttin **bucaq əmsalı** adlanır.  $\alpha$  bucağı *iti* olduqda  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ,  $\alpha$  *kor* bucağı olduqda isə  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ . Ona görə də düzbucaqlı koordinat sistemində  $y = kx + b$  **düz xətləri**  $k > 0$  və  $k < 0$  olduqda, yandakı şəkillərdə təsvir edilmişdir.

$k = 0$  olduqda,  $y = b$  düz xəttini alırıq ki, bu d/x absis oxuna paralel olub ordinat oxunu (0;b) nöqtəsində kəsir.

**Qeyd:**  $y = 0$  absis oxunun,  $x = 0$  ordinat oxunun tənliyidir.  $x = a$  d/x-i ordinat oxuna paralel olub absis oxunu  $x = a$  nöqtəsində kəsir.



## § 59. Nöqtələrin d/x üzərində olması şərtləri. İki düz xətt arasındakı bucaq

### Bir nöqtənin d/x üzərində olması şərti

$y = kx + b$  d/x-nin  $A(a;c)$  nöqtəsindən keçməsi (və yaxud  $A(a;c)$  nöqtəsinin bu d/x üzərində olması) o deməkdir ki, bu nöqtənin koordinatları  $y = kx + b$  tənliyini ödəyir, başqa sözlə  $c = ka + b$ . Bu bərabərlik nöqtənin d/x üzərində olması şərtidir.

### İki nöqtənin d/x üzərində olması şərti

Əgər  $y = kx + b$  d/x-i  $A(a;c)$  və  $B(m;n)$  nöqtələrindən keçirsə, onda bu nöqtələrin koordinatları aşağıdakı sistemi ödəyir:

$$c = ka + b, n = km + b.$$

Bu sistem isə iki nöqtənin bir d/x üzərində olması şərtidir.

**Qeyd.**  $A(a;c)$  nöqtəsinin  $y = f(x)$  funksiyasının qrafiki üzərində olması şərti belədir:  $c = f(a)$

**Nümunələr:** 1.  $y = 5x - 3$  düz xətti verilmişdir. m-in hansı qiymətində  $A(3;m)$  nöqtəsi bu d/x üzərində yerləşər?

**Həlli.** Nöqtənin d/x üzərində olması şərtinə görə  $m = 5 \cdot 3 - 3 = 12$ .

2.  $A(1;2)$  və  $B(-2;3)$  nöqtələrindən keçən d/x-in tənliyini yazın.

**Həlli.** İki nöqtənin düz xətt ( $y = kx + b$ ) üzərində olması şərtinə görə  $2 = k \cdot 1 + b, 3 = -k \cdot 2 + b$ .

Buradan alırıq ki,  $3b = 7 \rightarrow b = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}, k = -\frac{1}{3}$ . **Cavab:**  $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ .

**Qeyd 1.**  $k \neq a$  olduqda  $y = kx + b$  və  $y = ax + c$  d/x-ləri kəsişirlər. Kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün  $y = kx + b, y = ax + c$  tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.

**Qeyd 2.**  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  çevrəsi ilə  $y = kx + b$  düz xəttinin qarşılıqlı vəziyyətini (kəsişir, kəsişmir, toxunur) müəyyən etmək üçün  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, y = kx + b$  tənliklər sistemini həll etmək lazımdır. Bu sistemini həlli kvadrat tənliyə gətirilir.

Bu kvadrat tənliyin diskriminantı  $D > 0$  olduqda çevrə və d/x kəsişir,  $D < 0$  olduqda kəsişmir,  $D = 0$  olduqda isə d/x çevrəyə toxunur.

### İki düz xətt arasındakı bucaq

$y = kx + b$  və  $y = ax + c$  düz xətləri arasındakı bucaq

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k-a}{1+ka} \right|. \quad (*)$$

düsturu ilə hesablanır.

$y = kx + b$  və  $y = ax + c$  düz xətləri paralel olduqda  $\alpha = 0^\circ \Rightarrow \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow k - a = 0 \Rightarrow k = a$ .

### Sonuncu bərabərlik iki d/x-in paralellik şərtidir

(\*) düsturunda  $\alpha = 90^\circ$  olduqda sol tərəf ( $\operatorname{tg} \alpha$ ) təyin edilmədiyi üçün sağ tərəf də təyin edilməmişdir, yəni  $1 + ak = 0$ .

Buradan iki düz xəttin perpendikulyarlıq şərtini alırıq:

$$ak = -1.$$

Başqa sözlə:

**İki düz xətt perpendikulyardır, onda onların bucaq əmisallarının hasili (-1)-dir.**

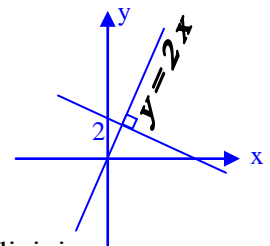
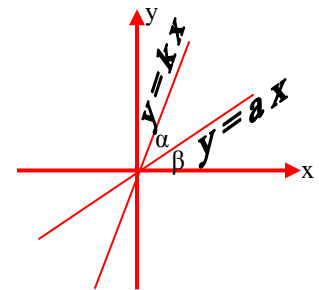
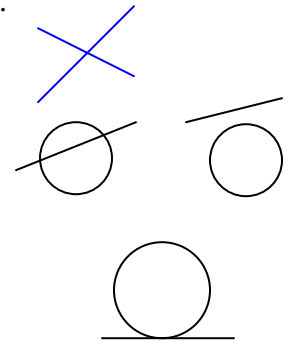
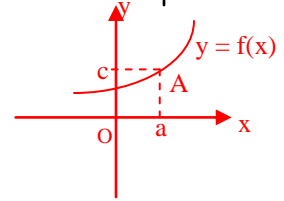
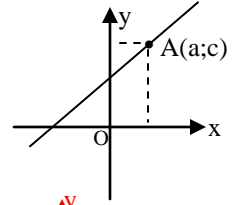
**Tərs mülahizə də doğrudur:**

**Bucaq əmicallarının hasili (-1) olan iki düz xətt perpendikulyardır.**

**Çalışma.**  $y = 2x$  düz xəttinə  $\perp$  olub,  $(0;2)$  nöqtəsindən keçən d/x-in tənliyini yazın.

**Həlli.** Perpendikulyarlıq şərtinə görə axtarılan d/x-in bucaq əmisalı  $(-0,5)$ -dir.

Ona görə də, axtarılan d/x-in tənliyi  $y = -0,5x + 2$  şəklindədir.



## § 60. Çalışmalar

- $\vec{a}(-1;2)$  və  $\vec{b}(2;4)$  vektorları verilib.  $2\vec{a}+3\vec{b}$  vektorunun uzunluğunu tapın.
- $\vec{a}(1;-2)$  və  $\vec{b}(3;5)$  vektorları verilib.  $3\vec{a}-5\vec{b}$  vektoru ilə  $\vec{a}-\vec{b}$  vektorunun skalyar hasilini tapın.
- $\vec{a}(3;4)$  və  $\vec{b}(2;1)$  vektorları arasındakı bucağın cos-nu tapın.
- Başlanğıcı koordinat başlanğıcında olan  $\vec{a}(0;-2)$  və  $\vec{b}(3;0)$  vektorlarının son nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.
- $\vec{a}(n;-2)$  və  $\vec{b}(-8;n)$  vektorlarının kollinear olduğunu bilərək  $n$ -i tapın.
- $\vec{a}(n;9)$  və  $\vec{b}(-8;4)$  vektorlarının perpendikulyar olduğunu bilərək  $n$ -i tapın.
- $m$ -in hansı qiymətində  $\vec{a}(m;1)$  və  $\vec{b}(m;m)$  vektorlarının cəmi vahid vektor olar?
- $m$ -in hansı qiymətində  $\vec{a}(2m;1+m)$  vektorunun uzunluğu 2-dir?
- $\vec{a}(7;-2)$  və  $\vec{b}(-2;8)$  vektorları verilib.  $2\vec{a}-3\vec{b}$  vektorunun uzunluğunu tapın.
- $\vec{a}(5;-6)$  və  $\vec{b}(3;5)$  vektorları verilib.  $\vec{a}+2\vec{b}$  vektoru ilə  $\vec{a}-\vec{b}$  vektorunun skalyar hasilini tapın.
- $\vec{a}(1;1)$  və  $\vec{b}(-1;-1)$  vektorları arasındakı bucağı tapın.
- Başlanğıcı  $(1;2)$  nöqtəsində olan  $\vec{a}(7;-2)$  və  $\vec{b}(8;-3)$  vektorlarının son nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.
- $\vec{a}(m;5)$  və  $\vec{b}(8;n)$  vektorlarının kollinear olduğunu bilərək  $mn$  hasilini tapın.
- $\vec{a}(n;6)$  və  $\vec{b}(-4;6)$  vektorlarının perpendikulyar olduğunu bilərək  $n$ -i tapın.
- $m$ -in hansı qiymətində  $\vec{a}(m;2m)$  və  $\vec{b}(2m;m)$  vektorlarının cəmi vahid vektor olar?
- $m$ -in hansı qiymətində  $\vec{a}(3m;3-m)$  vektorunun uzunluğu  $\sqrt{13}$ -ə bərabər olar?
- $\vec{a}(-3;3)$  və  $\vec{b}(2;2)$  vektorları arasındakı bucağı tapın.
- $\vec{a}$  və  $\vec{b}$  vektorlarının arasındakı bucağın  $120^\circ$ ,  $|\vec{a}|=2$ ,  $|\vec{b}|=3$  olduğunu bilərək bu vektorların skalyar hasilini hesablayın.
- $|\vec{a}|=4$ ,  $|\vec{b}|=3$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}=24$  olduğunu bilərək  $\vec{a}$  və  $\vec{b}$  vektorlarının arasındakı bucağı tapın.
- Hansı vektor  $\vec{a}(-12;18)$  vektoruna kollinearlıdır?  
1)  $(2;3)$  2)  $(-2;3)$  3)  $(-4;-6)$  4)  $(4;6)$  5)  $(4;-6)$
- Hansı vektor  $\vec{a}(1,2;1,8)$  vektoruna perpendikulyardır?  
1)  $(1;1)$  2)  $(-2;6)$  3)  $(-5;1)$  4)  $(3;2)$  5)  $(3;-2)$
- $Ox$ ,  $Oy$  oxları və  $y=2x+3$  düz xətti ilə məhdud edilmiş üçbucağın sahəsini tapın.
- $k$ -nın hansı qiymətində  $A(3;k)$  nöqtəsi  $y=\frac{3x-2}{5x+1}$  funksiyasının qrafiki üzərindədir?
- $M(1;4)$  nöqtəsindən keçən və mərkəzi  $x^2+y^2-4x+2y=20$  çevrəsinin mərkəzi ilə eyni olan çevrənin radiusunu tapın.
- $A(2;5)$  nöqtəsindən keçən və  $y=x-1$  d/x-nə paralel olan düz xəttin tənliyini yazın.
- Koordinat başlanğıcından  $y=-2x+1$  düz xəttinə qədər məsafəni tapın.
- Hansı düz xətt  $y=-2x+1$  düz xəttinə perpendikulyardır?  
1)  $y=2x+1$  2)  $y=-2x+3$  3)  $y=-0,2x+4$   
4)  $y=-0,5x+1$  5)  $y=0,5x+0,5$
- Hansı düz xətt  $y=2x-1$  düz xəttinə paraleldir?  
1)  $y=2x+3$  2)  $y=-2x+5$  3)  $y=-0,5x+4$   
4)  $y=-0,5x+2$  5)  $y=0,5x+5$
- $y=2x+8$  və  $y=2x+6$  düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.
- $y=2x+8$  və  $y=x+k$  düz xətlərinin absis oxu üzərində kəsişdiyini bilərək  $k$  parametrini tapın.
- $y=-6x+3$  və  $y=3x+k$  düz xətlərinin ordinat oxu üzərində kəsişdiyini bilərək  $k$  parametrini tapın.
- $y=5x+a$  və  $y=3x+b$  düz xətlərinin  $(2;3)$  nöqtəsində kəsişdiyini bilərək  $a$  və  $b$  parametrlərini tapın.
- $y=0,5x$  düz xəttinə perpendikulyar olan düz xəttin  $(-1;2)$  nöqtəsindən keçdiyini bilərək bu düz xəttin tənliyini yazın.
- Mərkəzi  $(-2;1)$  nöqtəsində, radiusu 3 sm olan çevrənin tənliyini yazın.
- $x^2+y^2-4x+4y+4=0$  tənliyi ilə verilən çevrə  $y=x$  düz xəttindən hansı məsafədədir.
- $y=-2x+3$  və  $y=kx+2$  düz xətləri arasındakı bucağın  $45^\circ$  olduğunu bilərək  $k$  əmsalını tapın.
- $y=\sqrt{3}x-3$  düz xəttinin ordinat oxu ilə əmələ gətirdiyi kiçik bucağı tapın.
- $(x-3)^2+(y+1)^2=5$  çevrəsi ilə məhdud edilmiş dairənin sahəsini tapın.
- $4x^2+9y^2+4x-6y=14$  tənliyi ilə verilən çevrənin uzunluğunu tapın.
- $(x-3)^2+(y+3)^2=9$  çevrəsinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

## §61. Nöqtə və düz xəttə(oxa) nəzərən simmetriya

**Tərif:** *ox boyunca qatlıqda iki nöqtə üst-üstə düşərsə , belə iki nöqtəyə oxa (d/x-ə) nəzərən simmetrik nöqtələr deyilir.*

Şəkildeki nöqtələrdən A və B , C və D **ordinat oxuna**, B və C, A və D nöqtələri **absis oxuna** , B və D nöqtələri isə **koordinat başlanğıcına** nəzərən simmetrikdir (BO = OD).

**Tərif:** *K MN parçasının orta nöqtəsidirsə, onda deyirlər ki, M və N nöqtələri K nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir.*

*Aydındır ki, absis oxuna nəzərən simmetrik köçürmə zamanı nöqtənin absisi dəyişmir, ordinatun işarəsi isə əksinə dəyişir;*

*Ordinat oxuna nəzərən simmetrik köçürmə zamanı nöqtənin ordinatı olduğu kimi qalır, absisi isə əksinə dəyişir;*

*Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriyada nöqtənin hər iki koordinatı əksinə dəyişir*

*Oxa nəzərən simmetrik köçürməyə aid çalışma nümunələri.*

**Çalışma 1.** A(1;3) və B(a;b) nöqtələrinin  $y = x$  d/x-nə nəzərən simmetrik olduğunu bilərək , a və b ədədlərini tapın.

**Həlli.** Şəkilə diqqətlə nəzər yetirsək  $a = 3$  ,  $b = 1$  alınır.

Ümumiyyətlə, **A(a;b)** nöqtəsinin  $y = x$  d/x-nə nəzərən simmetrik nöqtəsi **B(b;a)** şəklindədir.

**Çalışma 2.**  $y = -x$  d/x-nə nəzərən A(1;3) nöqtəsinə simmetrik olan nöqtəni tapın.

**Həlli.** Şəkildeki kvadrata əsasən axtarılan nöqtə B(-3;-1) - dir.

Ümumiyyətlə,  $y = -x$  d/x-nə nəzərən A(a;b) nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə B(-b;-a) şəklindədir.

**Çalışma 3.**  $y = 2x$  d/x-nə nəzərən A(-1;2) nöqtəsinə simmetrik olan nöqtəni tapın.

**Həlli:** Əvvəlcə, A(-1;2) nöqtəsindən keçən və  $y = 2x$  d/x-nə  $\perp$  olan düz xəttin tənliyini yazmaq.Axtarılan d/x  $y = -0,5x + c$  şəklindədir.Bu d/x A(-1;2) nöqtəsindən keçdiyi üçün  $2 = -0,5(-1) + c \Rightarrow c = 1,5$ .

$y = -0,5x + 1,5$  d/x-i B(a;b) nöqtəsindən keçdiyi üçün  $b = -0,5a + 1,5$ .

D nöqtəsi AB parçasının orta nöqtəsi olduğu üçün, bu nöqtənin koordinatları  $(\frac{a-1}{2}; \frac{b+2}{2})$  şəklindədir.D nöqtəsi  $y = 2x$  d/x üzərində oldu-

ğundan  $\frac{b+2}{2} = a - 1 \Rightarrow b = 2a - 4 = -0,5a + 1,5 \Rightarrow 2,5a = 5,5 \Rightarrow$

$a = 2,2$  ;  $b = -1,1 + 1,5 = 0,4$  . Cavab: B(2,2;0,4)

### Paralel köçürmə

**Tərif:**  $x' = x + a$  ,  $y' = y + b$  **düsturları ilə təyin olunan çevirməyə paralel köçürmə deyilir.**

**Paralel köçürmə zamanı** A(x;y) nöqtəsi B(x';y') nöqtəsinə köçür (burada a və b verilən ədədlərdir).

**Çalışma 1.**  $x' = x + 2$  ,  $y' = y - 1$  düsturları ilə verilmiş paralel köçürmədə A(-1;3) nöqtəsi hansı nöqtəyə köçür?

**Həlli:**  $x' = -1 + 2$  ,  $y' = 3 - 1 \Rightarrow x' = 1$  ,  $y' = 2$ . **Cavab:** B(1;2)

**Çalışma 2.**  $x' = x - 3$  ,  $y' = y + 1$  düsturları ilə verilmiş paralel köçürmədə hansı nöqtə B(-1;3) nöqtəsinə köçür?

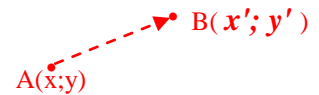
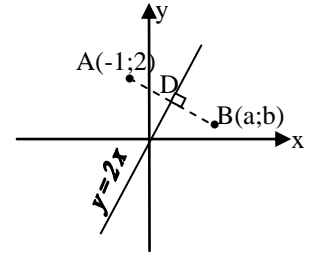
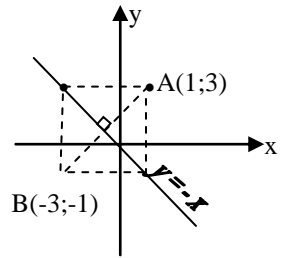
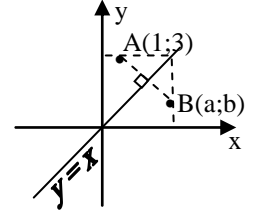
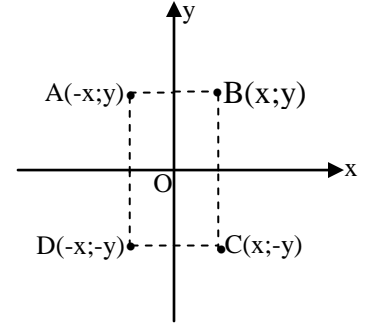
**Həlli:**  $-1 = x - 3$  ,  $3 = y + 1 \Rightarrow x = 2$  ,  $y = 2$ . **Cavab:** A(2;2)

**Çalışma 3.** Paralel köçürmədə A(4;5) nöqtəsi B(-1;2) nöqtəsinə köçür.

Bu paralel köçürmədə C(-6;2) hansı nöqtəyə köçür?

**Həlli:** Şərtə görə  $-1 = 4 + a$  ,  $2 = 5 + b \Rightarrow a = -5$  ,  $b = -3$ . Deməli, nəzərdə tutulan paralel köçürmə  $x' = x - 5$  ,  $y' = y - 3$  şəklindədir.

Onda  $x' = -6 - 5$  ,  $y' = 2 - 3 \Rightarrow x' = -11$  ,  $y' = -1$ . **Cavab:** C nöqtəsi D(-11;-1) nöqtəsinə köçür.





*Müəllifin əsas pedaqoji fəaliyyəti  
haqqında qısa məlumat:*

*1. BDU-nun mexanika-riyaziyyat fakültəsinin məzunu (1972-ci il, diplom);*

*2. Xankəndi şəhərində orta və ali məktəbdə riyaziyyat müəllimi (1972-1979);*

*3. Fizika, riyaziyyat və informatika təmayüllü liseydə 18 il riyaziyyat müəllimi (1980-1998);*

*4. 70 saylı pilot məktəbində yeni təlim texnologiyaları üzrə direktor müavini (1998-2002);*

*5. Nizami rayon təhsil şöbəsində yeni təlim texnologiyaları üzrə metodist (2003 - 2004);*

*6. Humanitar liseydə (BSU) "İntellekt" kursunun müəllimi və rəhbəri (2002-2006);*

*7. Parapsixologiya kursunun məzunu (1996, diplom);*

*8. Dərslərin qiymətləndirilməsi üzrə beynəlxalq ekspert Tim Hantın seminarlarının iştirakçısı (1999-2001, sertifikat);*

*9. Kanadalı psixoloq Larri Nisanın seminarlarının iştirakçısı (2003, sertifikat);*

*10. "Tərəqqi" təlim modeli layihəsinin (2002) və bu model üzrə yazılmış "Riyaziyyat və intellekt" vəsaitinin müəllifi (2006).*

**"Riyaziyyat və intellekt"  
vəsaitləri**

Vəsaitlər ayrı-ayrı A, B, C variantları şəklində 2006-cı ildə riyazi, məntiqi və psixoloji testlər toplusu şəklində çap edilmişdir. Bu vəsaitə şagirdlərin dialoq və diskussiya mədəniyyətini formalaşdıran intellekt meyarları və əlamətləri, atalar sözləri və müdrik kəlamlar da daxil edilmişdir.

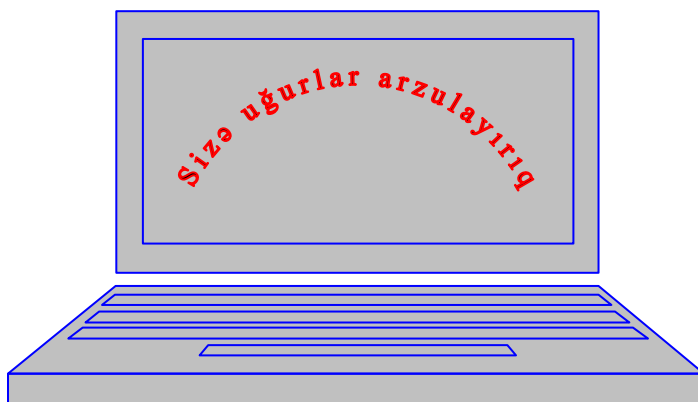
"Riyaziyyat və intellekt" vəsaitləri şagirdləri fəal təlim prosesinə cəlb etmək məqsədi ilə **motevasiya mərhələsi** (cəlb etmə və "əqli gimnastika") kimi hazırlanmışdır.

Bu vəsaitlərin hər variantı 7 - 10 günlük şagird iş dəftəri səviyyəsində tərtib edilmişdir. "Riyaziyyat və intellekt" vəsaitləri üzrə iş üç istiqamətdə aparıla bilər:

*a) Lisey tədrisi prosesində yay tətildən qayıdan 5-ci sinif şagirdləri dərslər üzrə təlim fəaliyyətinə başlamazdan əvvəl iki həftə müddətində A və B variantlarını, dərslər ili boyunca isə şagirdlər hər tətildən qayıdarkən C variantını hissə-hissə işləyirlər.*

*b) Fərdi hazırlıq kurslarında (məşğələlərində) yeni başlayanlar ümumi program üzrə işə başlamazdan əvvəl bir ay müddətində A, B, C variantlarını işləyirlər.*

*c) Yaradıcı müəllimlər öz bildikləri kimi hər bir sinifdə istifadə edə bilərlər.*



İsmayılov İxtiyar Məhəmməd oğlu

*Bədii redaktor : Nurlana Babayeva*

*Dizayner : Cəsarət Qasimov*

*Korrektor : Rövşanə Qəmbərova*