УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И ФОРМУЛА СЛЕДА ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

Н.М.Асланова

Исследована асимптотика функции распределения и вычислен регуляри-зованный след краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения с граничным условием зависящим от спектрального параметра.

Введение. Пусть H-сепарабельное гильбертово пространство и $(\cdot,\cdot)$-скалярное произведение, а $\|\cdot\|$-норма в нем.

Пусть также $\mathbf{L}_2 = L_2\left(H,(0,1)\right) \oplus H$. Скалярное произведение в $\mathbf{L}_2$ задается как

$$(Y,Z)_{\mathbf{L}_2} = \int\limits_0^1 \left(y\left(t\right),\ \ z\left(t\right)\right)dt + (y_1,z_1),$$

где $Y = \{y\left(t\right),y_1\}$, $Z = \{z\left(t\right),z_1\}$; $y\left(t\right)$, $z\left(t\right) \in L_2\left(H,(0,1)\right)$; $y_1, z_1 \in H$.

В пространстве $L_2\left(H,(0,1)\right)$ рассмотрим задачу

$$l[y] \equiv -y''\left(t\right) + \frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}y(t) + Ay(t) + q\left(t\right)y = \lambda y(t), \quad \nu \geq 1 \tag{1}$$

$$y'\left(1\right) - \lambda y\left(1\right) = 0, \tag{2}$$

где A- самосопряженный положительно определенный оператор в H (можно считать, что $A > E$, E-единичный оператор в H) и является обратным для вполне непрерывного.

Предположим также, что операторная функция $q\left(t\right)$ слабо измерима, $\|q\left(t\right)\|$ как функция от t ограничена на $[0,1]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. $q\left(t\right)$ имеет вторую слабую производную на $[0,1]$, и $q^{(l)}\left(t\right)$ $(l=0,1,2)$ при каждом $t\in[0,1]$ являются ядерными самосопряженными оператора-ми в H, т.е. $q^{(l)}\left(t\right) \in \sigma_1$, $\left[q^{(l)}\left(t\right)\right]^* = q^{(l)}\left(t\right)$.

2. Функции $\left\|q^{(l)}\left(t\right)\right\|_1$ $(l=0,1,2)$ ограничены на отрезке $[0,1]$ ($\|\cdot\|_1-$норма в σ_1).

3. $\int\limits_0^1 \left(q\left(t\right)f,f\right)dt = 0$, при любом $f \in H$.

При $q(t) \equiv 0$, с задачей (1), (2) в пространстве $\mathbf{L}_2$ можно связать самосопряженный оператор L_0 с областью определения

$$D(L_0) = \{Y \in \mathbf{L}_2 | l[y] \in L_2(H, (0,1)) \quad \text{и} \quad y_1 = y(1)\},$$

действующий как

$$L_0(Y) = \{l[y], y'(1)\}.$$

Легко проверить, что так определенный оператор самосопряженный и для $Y = \{y(t), y(1)\} \in D(L_0)$ выполняется $y(0) = y'(0) = 0$.

При $q(t) \not\equiv 0$ соответствующий оператор обозначим $L : L = L_0 + Q$, где $Q : Q\{y(t),\ y(1)\} = \{q(t)\, y(t), 0\}$-ограниченный самосопряженный оператор в $\mathbf{L}_2$.

Цель настоящей работы - установить дискретность спектра задачи (1), (2), изучить асимптотическое распределение собственных значений, зная асимптотику собственных чисел оператора A и получить формулу регуляризованного следа оператора L.

Отметим, что асимптотическое распределение собственных значений краевых задач для дифференциально-операторного уравнения Штурма-Лиувилля без особенностей на конечном отрезке и со спектральным параметром в граничных условиях изучено в работах [1], [2], [3].

В работах [4]-[13] исследованы спектр и регуляризованный след для различных операторов. Подробная библиография по этой теме имеется в [12].

1. Дискретность спектра. Сначала исследуем задачу (1), (2) при $q(t) \equiv 0$. Условия $A > E$ в H и $\nu \geq 1$ влекут положительную определен-ность оператора L_0 в $\mathbf{L}_2$. Действительно, для любого $Y \in D(L_0)$ имеем

$$(L_0 Y, Y)_{\mathbf{L}_2} = \int_0^1 \left(-y''(t) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} y(t) + Ay(t),\ \ y(t) \right) dt +$$

$$+ (y'(1),\ y(1)) \geq \int_0^1 \|y'(t)\|^2 dt + \int_0^1 \|y(t)\|^2 dt.$$

Поскольку вложение $W_2^1(H; (0,1)) \subset C(H, [0,1])$ непрерывно, то (см. [14], с.48, [15], теорема 1.7.7)

$$\|y(1)\| \leq C \|y(t)\|_{W_2^1(H;(0,1))},$$

где $C>0$- некоторая константа. Следовательно,

$$(L_0Y,Y)_{\mathbf{L}_2} \geq C\left(\int\limits_0^1 \|y\,(t)\|^2 dt + \|y\,(1)\|^2\right) = C\|Y\|^2_{\mathbf{L}_2},$$

т.е. оператор L_0 положительно определен.

Пусть числа $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n \leq ...$ являются собственными значе-ниями, а элементы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ соответствующими им ортонормиро-ванными в H собственными векторами оператора A. Положим $y(t) \in D(A)$, $\forall t \in [0,1]$ и $y_k\,(t) = (y\,(t)\,, \varphi_k)$. Тогда

$$(y,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k\,(t)|^2, \quad \left(\left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}E + A\right)y, y\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2} + \gamma_k\right)|y_k\,(t)|^2. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *При условии вполне непрерывности A^{-1} в H, оператор L_0 имеет дискретный спектр.*

Доказательство. Так как L_0 положительно определен, то по теореме Реллиха для доказательства дискретности спектра достаточно показать компактность в L_2 множества векторов ([16], стр. 386).

$$\mathbf{Y} = \Bigg\{ Y \in D\,(L_0) \,/\, (L_0Y, Y) = \int\limits_0^1 \left[(y'\,(t)\,, y'\,(t)) + \right.$$

$$\left. + \left(\left(\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}E + A\right)y(t), y(t)\right)\right] dt \leq 1 \Bigg\}. \tag{1.2}$$

Сперва докажем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $R = R\,(\varepsilon)$, что*

$$\int\limits_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k\,(t)|^2 dt + \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k\,(1)|^2 < \varepsilon.$$

Доказательство. Из равенств (1.1) следует, что если $Y \in \mathbf{Y}$, то

$$\int\limits_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k\,(t)|^2 dt = \frac{1}{\gamma_R}\int\limits_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k\,(t)|^2 \gamma_R dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_R}\int\limits_0^1 (Ay(t), y(t))dt \leq \frac{1}{\gamma_R}(L_0Y, Y) \leq \frac{1}{\gamma_R}.$$

Так как $\gamma_R \to \infty$ при $R \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $R(\varepsilon)$, что $\frac{1}{\gamma_R} < \varepsilon^2 \left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Значит при таком R выполняется неравенство

$$\int\limits_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt < \varepsilon^2 \left(\sqrt{2}-1\right)^2. \tag{1.3}$$

С другой стороны, учитывая (1.2)

$$\sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 = \sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int\limits_0^1 \left(y_k^2(t)\right)' dt \right| = \sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int\limits_0^1 2y_k'(t)\, y_k(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq 2 \left(\sum_{k=R+1}^{\infty} \int\limits_0^1 |y_k'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=R+1}^{\infty} \int\limits_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\sqrt{\gamma_R}} < 2\varepsilon \left(\sqrt{2}-1\right).$$

Из (1.3) и последнего неравенства, получим

$$\int\limits_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 dt + \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 < \varepsilon \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 2\varepsilon \left(\sqrt{2}-1\right) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Пусть $Y \in \mathbf{Y}$. Через E_R обозначим множество всех вектор функций $\widetilde{Y} = \{\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_R\}$, где $\widetilde{y}_k = \{y_k(t)\,,\ y_k(1)\} \in L_2(0,1) \oplus C$. Из леммы 1.1 следует, что множество E_R есть ε - сеть в $\mathbf{L}_2$ для множества $\mathbf{Y}$. Поэтому для доказательства компактности множества $\mathbf{Y}$, надо доказать компактность в $\mathbf{L}_2$ множества E_R. Так как $|y_k(1)| \leq 1 \quad (k = 1, .., R)$, для этого достаточно показать, что к $y_k(t)$ $(k = 1, .., R)$ применим критерий компактности в $L_2(0,1)$ ([17], стр. 291).

Нам следует показать, что функции $y_k(t)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в метрике $L_2(0,1)$. Согласно (1.2)

$$\int\limits_0^1 |y_k(t)|^2 dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^t |y_k'(\tau)|^2 d\tau dt \leq \int\limits_0^1 |y_k'(\tau)|^2 d\tau \leq 1.$$

Эта доказывает равномерную ограниченность функций $y_k(t)$. Для доказательства равномерной непрерывности заметим, что

$$|y_k(t+\eta) - y_k(t)| \leq \int\limits_0^\eta |y_k'(t+\xi)| d\xi$$

и продолжим $y_k(t)$ во вне $(0,1)$ нулем.

Имеем

$$\int\limits_0^1 |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2 dt = \int\limits_0^{1-\eta} |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2 dt + \int\limits_{1-\eta}^1 |y_k(t)|^2 dt, \tag{1.4}$$

$$\int\limits_{1-\eta}^1 |y_k(t)|^2 dt = \int\limits_{1-\eta}^1 \left| \int\limits_0^t y_k'(\tau)\, d\tau \right|^2 dt \leq \int\limits_{1-\eta}^1 \left| \int\limits_0^1 y_k'(\tau)\, d\tau \right|^2 dt \leq \eta, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_0^{1-\eta} |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2 dt \leq \int\limits_0^{1-\eta} \left(\int\limits_0^\eta |y_k'(\tau+t)| d\tau \right)^2 dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{1-\eta} \eta \int\limits_0^\eta |y_k'(\tau+t)|^2 d\tau dt \leq \int\limits_0^{1-\eta} \eta \int\limits_0^1 |y_k'(\tau)|^2 d\tau dt < \eta(1-\eta) < \eta. \tag{1.6}$$

Если $|\eta| < \varepsilon$, то учитывая (1.5), (1.6) в (1.4) получим

$$\int\limits_0^1 |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2 dt < 2\varepsilon,$$

что показывает равностепенную непрерывность множества E_R.

Этим завершается доказательство дискретности спектра L_0.

2. Асимптотическое распределение собственных значений оператора L_0. Предположим, что собственные числа оператора $A - \gamma_n \sim a \cdot n^\alpha$ $(n \to \infty,\ a > 0,\ \alpha > 0)$.

Учитывая спектральное разложение оператора A, для коэффициентов $y_k(t) = (y(t), \varphi_k)$ получаем следующую задачу:

$$-y_k''(t) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} y_k(t) = (\lambda - \gamma_k)\, y_k(t), \quad t \in (0,1), \tag{2.1}$$

$$y_k'(1) - \lambda y_k(1) = 0. \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.1) из $L_2(0,1)$ имеет вид

$$y_k(t) = \sqrt{t} J_\nu \left(t\sqrt{\lambda - \gamma_k} \right).$$

Для того, чтобы оно еще удовлетворяло (2.2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2} J_\nu \left(\sqrt{\lambda - \gamma_k} \right) + \sqrt{\lambda - \gamma_k} J_\nu' \left(\sqrt{\lambda - \gamma_k} \right) - \lambda J_\nu \left(\sqrt{\lambda - \gamma_k} \right) = 0 \tag{2.3}$$

хотя бы при одном γ_k ($\lambda \neq \gamma_k$). Таким образом, спектр оператора L_0 состоит из тех вещественных $\lambda \neq \gamma_k$, которые хотя бы при одном k удовлетворяют (2.3).

Обозначим $z = \sqrt{\lambda - \gamma_k}$. Тогда уравнение (2.3) приобретает вид

$$z J_\nu'(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k \right) J_\nu(z) = 0, \tag{2.4}$$

или же пользуясь соотношением ([18], стр.56)

$$z J_\nu'(z) = z J_{\nu-1}(z) - \nu J_\nu(z),$$

имеем

$$z J_{\nu-1}(z) + \left(\frac{1}{2} - \nu - z^2 - \gamma_k \right) J_\nu(z) = 0. \tag{2.5}$$

Отыщем собственные значения оператора L_0, меньшие γ_k. Этим значениям соответствуют мнимые корни уравнения (2.5).

Взяв $z = 2i\sqrt{y}$ и пользуясь ([18], стр.51)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} = \frac{J_\nu(2i\sqrt{y})}{(i\sqrt{y})^\nu}$$

уравнение (2.5) напишем в виде

$$2i\sqrt{y}\,(i\sqrt{y})^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu)} +$$

$$+ \left(4y - \gamma_k - \nu + \frac{1}{2} \right) (i\sqrt{y})^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} = 0,$$

или же

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!\Gamma\left(n+\nu\right)}+\left(4y-\gamma_k-\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!\Gamma\left(n+\nu+1\right)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\frac{\left(4n+2\right)\left(\nu+n\right)-\left(\gamma_k+\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+n\right)\left(\nu+n\right)}=0. \tag{2.6}$$

Так как $\left(4w+2\right)\left(\nu+w\right)-\left(\gamma_k+\nu-\frac{1}{2}\right)=0$ в точках

$$w=-\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}+\gamma_k}}{2}$$

коэффициенты при y в (2.6) становятся положительными при

$$n>\left[-\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2}+\frac{\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}+\gamma_k}}{2}\right]. \tag{2.7}$$

Пусть $N-$число положительных нулей ряда (2.6), $W-$число перемен знака в последовательности его коэффициентов. Так как радиус сходи-мости этого ряда $-\infty$, то по правилу знаков Декарта ([19, стр. 52) $W-N$ представляет собой неотрицательное четное число. Согласно (2.7) в нашем случае $W=1$, поэтому $N=1$, т.е. начиная с некоторого k уравнение (2.6) имеет точно один положительный корень, которому соответствует мнимый корень уравнения (2.5).

Найдем асимптотику мнимых корней уравнения (2.5). Обозначив $z=iy$ и пользуясь асимптотикой $J_\nu\left(z\right)$ при больших по модулю мнимых z ([20], стр. 976)

$$J_\nu\left(iy\right)=I_\nu\left(y\right)e^{\frac{\pi}{2}\nu i},\quad I_\nu\left(y\right)\sim\frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2y}+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right),$$

получим $y\sim\frac{\nu^2-\frac{9}{4}}{4}+\sqrt{\gamma_k-\sqrt{\gamma_k}(\nu^2-\frac{1}{4})}$ откуда

$$\lambda_k\sim\frac{2\nu^2+\frac{7}{2}}{4}\sqrt{\gamma_k}.$$

Найдем асимптотику тех решений уравнения (2.3) которые больше γ_k, другими словами вещественных корней уравнения (2.5).

Учитывая следующую асимптотику при больших $|z|$ ([18], стр. 222)

$$J_\nu\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{nz}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

получаем, что

$$ctg\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{z}{\frac{1}{2}-z^2-\gamma_k-\nu}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

откуда

$$z_{m,k}=\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi m+O\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $m-$принимает большие целые значения.

Итак, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Собственные числа оператора L_0 распадаются на две серии:*

$$\lambda_k\sim\frac{2\nu^2+\frac{7}{2}}{4}\sqrt{\gamma_k};\quad \lambda_{m,k}=\gamma_k+z_{m,k}^2=\gamma_k+\alpha_m,$$

где $\alpha_m\sim\left(\pi m+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)^2$.

Обозначим мнимые корни (2.5) через $x_{0,k}$, а вещественные корни через $x_{m,k}$.

Теперь докажем следующие две леммы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 2.2. *Уравнение (2.5) не имеет других комплексных корней, кроме мнимых.*

Доказательство. Пусть α будет комплексным корнем функции $zJ_\nu'(z)+\left(\frac{1}{2}-z^2-\gamma_k\right)J_\nu(z)$, тогда $\alpha_0=\bar{\alpha}$ также будет корнем этой функции, так как ряд для $J_\nu(z)$

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

имеет вещественные коэффициенты. Из уравнения Бесселя, с $\lambda=\alpha$ и $\lambda=\alpha_0$ получается, что ([18], стр. 531)

$$\int\limits_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\alpha_0 t)\,dt=\frac{x}{\alpha^2-\alpha_0^2}\left(J_\nu(\alpha x)\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}-J_\nu(\alpha_0 x)\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\right),$$

и, таким образом, применимая во внимание, что $\alpha^2\neq\alpha_0^2$, $\overline{J_\nu(\alpha t)}= \overline{J_\nu(\alpha_0 t)}$

$$\int\limits_0^1 t|J_\nu(\alpha t)|^2dt=\frac{1}{\alpha^2-\alpha_0^2}\left(J_\nu(\alpha)\,\alpha_0J_\nu'(\alpha_0)-J_\nu(\alpha_0)\,\alpha J_\nu'(\alpha)\right),$$

имея ввиду

$$\alpha_0 J_\nu'(\alpha_0) = \left(\alpha_0^2 + \gamma_k - \tfrac{1}{2}\right) J_\nu(\alpha_0),$$
$$\alpha J_\nu'(\alpha) = \left(\alpha^2 + \gamma_k - \tfrac{1}{2}\right) J_\nu(\alpha)$$

получим

$$\int\limits_0^1 t|J_\nu(\alpha t)|^2 dt =$$

$$= \frac{J_\nu(\alpha) J_\nu(\alpha_0)\left(\alpha_0^2 + \gamma_k - \frac{1}{2}\right) - J_\nu(\alpha_0) J_\nu(\alpha)\left(\alpha^2 + \gamma_k - \frac{1}{2}\right)}{\alpha^2 - \alpha_0^2} =$$

$$= \frac{\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right)}{\alpha^2 - \alpha_0^2}|J_\nu(\alpha)|^2 = -|J_\nu(\alpha)|^2.$$

Подинтегральное выражение слева положительно, а справа получи-ли отрицательное число, и мы пришли, таким образом, к противоречию.

Следовательно, число α не может существовать, и лемма доказана.

Пусть C- прямоугольный контур с вершинами

$$\pm iB, \quad \pm iB + m\pi + \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{\pi}{4} = \pm iB + A_m,$$

где B-большое положительное число, и который обходит начала коорди-нат и мнимый корень $-ix_{0,k}$ по малой полуокружности справа от мнимой оси, и $ix_{0,k}$ слева.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.3. *Если $m-$ достаточно большое целое число, то число корней функции $z^{-\nu}\left(zJ_\nu'(z) + \left(\frac{1}{z} - z^2 + \gamma_k\right) J_\nu(z)\right)$ между мнимой осью и линией $Rez = m\pi + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ в точности равно m.*

Доказательство. Поскольку $z^{-\nu}\left[zJ_\nu'(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right) J_\nu(z)\right]$ является целой функцией от z, число ее корней внутри C равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{\left[z^{-\nu}\left(zJ_\nu'(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right) J_\nu(z)\right)\right]'}{z^{-\nu}\left(zJ_\nu'(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right) J_\nu(z)\right)} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{\left[z^{-\nu}\left(-zJ_{\nu+1}(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k + \nu\right) J_\nu(z)\right)\right]'}{z^{-\nu}\left(zJ_\nu'(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right) J_\nu(z)\right)} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{-J_{\nu+1}(z)\left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k + \nu\right) + 2\nu J_{\nu+1}(z) - 3zJ_\nu(z)}{-zJ_{\nu+1}(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k + \nu\right) J_\nu(z)} dz$$

Здесь мы воспользовались тождествами ([18], стр. 55)

$$zJ'_{\nu}(z) = \nu J_{\nu}(z) - zJ_{\nu+1}(z),$$

$$zJ'_{\nu+1}(z) = zJ_{\nu}(z) - (\nu+1) J_{\nu+1}(z).$$

Поскольку подинтегральная функция нечетная, в окрестности нуля порядок числителя $O(z^{\nu+1})$, знаменателя $O(z^{\nu})$, то интеграл вдоль левой части контура превращается в ноль.

Рассмотрим интегралы по оставшимся трем сторонам контура. Заметим сначала, что на этих сторонах ([18], стр. 221, стр.88)

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \{1 + \eta_{1,\nu}(z)\},$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \{1 + \eta_{2,\nu}(z)\},$$

$$J_{\nu}(z) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)}{2},$$

где $\eta_{1,\nu}(z)$, $\eta_{2,\nu}(z)$ будут порядка $O\left(\frac{1}{z}\right)$, когда $|z|$ велик.

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB} \frac{-J_{\nu+1}(z)\left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k + \nu\right) + 2\nu J_{\nu+1}(z) - 3zJ_{\nu}(z)}{-zJ_{\nu+1}(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k + \nu\right) J_{\nu}(z)} dz \sim$$

$$\sim \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{iB}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \frac{J_{\nu+1}(z)}{J_{\nu}(z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{iB}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1 + \eta_{2,\nu+1}(z)}{1 + \eta_{2,\nu}(z)}\right] \left[1 + O\left(e^{2iz}\right)\right] dz \to \frac{m}{2} + \frac{\nu}{4} + \frac{1}{8}.$$

Аналогично, интеграл по нижней стороне стремится к этой же величине.

Для вычисления интеграла вдоль четвертой стороны воспользуемся соотношением [18, стр. 547]

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_{\nu}(z)} - tg\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\nu+1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

при большом $|z|$.

Так как $O\left(\frac{1}{z}\right)$ остается ограниченной на правой части контура, учитывая

$$\int\limits_{-iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} tg\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dz=0,$$

получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\left[\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right]dz=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\nu+1}{2z}+tg\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]\times$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)dz\sim-\frac{1}{4}(2\nu+1)+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Следовательно, предел интеграла по всему контуру равен $m+O\left(\frac{1}{m}\right)$, а поскольку интеграл должен быть целым числом, он равен m.

Лемма доказана.

Через $N(\lambda, L_0)$ обозначим функцию распределения собственных значений оператора L_0:

$$N(\lambda, L_0)=\sum_{\lambda_j(L_0)<\lambda}1=N_1(\lambda)+N_2(\lambda),$$

где

$$N_1(\lambda)=\sum_{\lambda_k<\lambda}1,\quad N_1(\lambda)=\sum_{\lambda_{n,k}<\lambda}1.$$

Поскольку $\gamma_k\sim a\cdot k^\alpha$, то

$$\lambda_k\sim\frac{2\nu^2+\frac{7}{2}}{4}\sqrt{a}k^{\frac{\alpha}{2}}=c_1k^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$N_1(\lambda)\sim\frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}}\lambda^{\frac{2}{\alpha}}.\qquad(2.8)$$

Из асимптотики $x_{m,k}$ вытекает, что можно найти такое c, что при больших m

$$\pi m < x_{m,k} < \pi m + c.$$

Учитывая это неравенство, также лемму 2.3 получим, что $N_2(\lambda)$ меньше $N_2'(\lambda)$- числа положительных целочисленных пар (m,k) удовлет-воряющих неравенству

$$\pi^2 m^2 + ak^\alpha < \lambda, \tag{2.9}$$

больше $N_2''(\lambda)$ $-$числа целочисленных положительных пар удовлетворяющих $(\pi m + c)^2 + ak^\alpha < \lambda:$

$$N_2''(\lambda) < N_2(\lambda) \le N_2'(\lambda). \tag{2.10}$$

Следовательно, из (2.9) и (2.10) можно получить (см. [21, §3, лемма 2])

$$\frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}} - (c+1)\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\pi}\lambda^{\frac{1}{2}} \le N_2''(\lambda) \le N_2(\lambda) \le N_2'(\lambda) \le \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}},$$

где $\gamma = \int\limits_0^\pi \cos^2 t \sin t^{\frac{2}{\alpha}-1} dt$.

Откуда получаем, что

$$N_2(\lambda) \sim \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}}. \tag{2.11}$$

Таким образом, из (2.8) и (2.11)

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}}\lambda^{\frac{2}{\alpha}} + \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}}.$$

Итак, если $\alpha > 2$, то

$$N(\lambda, L_0) \sim \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}}$$

и, следовательно,

$$\lambda_n(L_0) \sim dn^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} \quad \left(d = \left[\frac{2\gamma}{\pi\alpha\sqrt{a}}\right]^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right)$$

Если же $\alpha < 2$, то $N(\lambda, L_0) \sim \frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}}\lambda^{\frac{2}{\alpha}}$ и следовательно, $\lambda_n(L_0) \sim c_1 n^{\frac{\alpha}{2}}$.

При $\alpha = 2 \quad N(\lambda) \sim \left[\frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{2\gamma}{\pi\alpha\sqrt{a}}\right]\lambda$, откуда $\lambda_n(L_0) \sim dn$.

Определим асимптотику собственных чисел оператора $L = L_0 + Q$. Поскольку Q ограниченный оператор в $\mathbf{L}_2$, из соотношения для резольвент операторов L_0 и L [22, стр. 180]

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(L_0) - R_\lambda(L)\, Q R_\lambda(L_0) \tag{2.12}$$

заключаем, что спектр L также дискретен.

Пользуясь (2.12) и также свойствам s чисел вполне непрерывных операторов ([22], стр. 44, 49), по той же схеме, что и в [2] можно получить следующую асимптотику для собственных чисел оператора $L - \mu_n(L) : \mu_n(L) \sim dn^\delta$.

Таким образом, приходим к следующей теореме

Теорема 2.1. *Пусть* $\gamma_n \sim an^\alpha$ $(0 < a,\ \alpha = const)$. *Тогда*

$$\lambda_n(L_0) \sim \mu_n(L) \sim dn^\delta, \tag{2.13}$$

где

$$\delta = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha+2}, & \text{при } \alpha > 2 \\ \frac{\alpha}{2}, & \text{при } \alpha < 2 \\ 1, & \text{при } \alpha = 2 \end{cases} \tag{2.14}$$

3. Регуляризованный след оператора L.

Пусть A_0 самосопряженный положительный дискретный оператор, $R_0(\lambda)$ его резольвента, $\{\varphi_j\}$–базис из его собственных векторов, $\{\lambda_n\}$– его собственные значения, $\{\mu_n\}$– собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей. В работе [11] доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть оператор B таков, что $D(A_0) \subset D(B)$, и пусть существует число $\delta \in [0, 1)$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, и некоторое число $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$ такое, что $A_0^{-(1-\delta-\omega)}$–ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ и последовательность контуров $\Gamma_m \in C$ такие, что при $\omega \geq \frac{\delta}{l}$ верна формула*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n_m}(\mu_i - \lambda_i) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\sum_{k=1}^{l}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\, tr(BR_0(\lambda))^k d\lambda\right) = 0$$

В частности, при $\omega \geq \delta$ верна формула

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n_m}(\mu_i - \lambda_i - (B\varphi_i, \varphi_i)) = 0.$$

Возьмем $\alpha > 2$, $L_0 \equiv A$, $Q \equiv B$. Тогда по теореме 2.1 при $\delta = 0$, $\omega < \frac{\alpha-2}{2\alpha}$ все условия приведенной выше теоремы 1 удовлетворяются, поэтому для разности собственных значений L_0 и L справедлива

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n - (Q\psi_n, Q\psi_n)_{\mathbf{L_2}}) = 0,$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots$ ортонормированные собственные вектор–функции оператора L_0. $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n)$ назовем регуляризованным следом опертора L.

Вычислим норму собственной функции оператора L_0 в L_2. Для этого воспользуемся равенством ([18], стр. 531)

$$\int\limits_0^1 tJ_\nu\left(\alpha t\right) J_\nu\left(\beta t\right) dt = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}[J_\nu\left(\alpha\right)\beta J'_\nu\left(\beta\right) - J_\nu\left(\beta\right)\alpha J'_\nu\left(\alpha\right)].$$

Переходя к пределу при $\alpha \to \beta$

$$\int\limits_0^1 tJ^2_\nu\left(\beta t\right) dt = \frac{\beta J'^2_\nu\left(\beta\right) - J_\nu\left(\beta\right)\left(J'_\nu(\beta) + \beta J''_\nu(\beta)\right)}{2\beta}.$$

Учитывая тождества

$$J'_\nu\left(z\right) = -J_{\nu+1}\left(z\right) + \frac{\nu}{z}J_\nu\left(z\right),$$

$$J''_\nu\left(z\right) = -J'_{\nu+1}\left(z\right) - \frac{\nu}{z^2}J_\nu\left(z\right) - \frac{\nu}{z}J'_\nu\left(z\right),$$

выражение в скобках в правой части последнего равенства преобразуется к виду

$$-J_{\nu+1}\left(\beta\right) + \frac{\nu}{\beta}J_\nu\left(\beta\right) - \beta J'_{\nu+1}\left(\beta\right) - \frac{\nu}{\beta}J_\nu\left(\beta\right) + \nu J'_\nu\left(\beta\right)$$

или же согласно $zJ'_{\nu+1}\left(z\right) = zJ_\nu\left(z\right) - \left(\nu+1\right)J_{\nu+1}\left(z\right)$ будет иметь следующий вид

$$\nu J_{\nu+1}\left(\beta\right) - \beta J_\nu\left(\beta\right) + \nu J'_\nu\left(\beta\right).$$

Опять же из соотношения

$$J'_\nu\left(z\right) = -J_{\nu+1}\left(z\right) + \frac{\nu}{z}J_\nu\left(z\right),$$

имеем

$$\int\limits_0^1 tJ_\nu^2(\beta t)\,dt = \frac{\beta^2 J'^2_\nu(\beta) + (\beta^2 - \nu^2) J_\nu^2(\beta)}{2\beta^2}$$

Так как $x_{m,k}$ удовлетворяют уравнению

$$\beta J'_\nu(\beta) + \left(\frac{1}{2} - \beta^2 - \gamma_k\right) J_\nu(\beta) = 0,$$

то

$$\int\limits_0^1 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)\,dt = \frac{\left[\left(\frac{1}{2} - x_{m,k}^2 - \gamma_k\right)^2 + \left(x_{m,k}^2 - \nu^2\right)\right] J_\nu^2(x_{m,k})}{2x_{m,k}^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \gamma_k + x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2\gamma_k + \gamma_k^2 - \nu^2}{2x_{m,k}^2} J^2(x_{m,k}).$$

Таким образом,

$$\left(\sqrt{t}J_\nu(x_{m,k}t)\varphi_k, J_\nu(x_{m,k})\varphi_k\right)_{\mathbf{L}_2} = \int\limits_0^1 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)(\varphi_k,\varphi_k)\,dt + J_\nu^2(x_{m,k})(\varphi_k,\varphi_k) =$$

$$= \frac{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2\gamma_k + \gamma_k^2 - \gamma_k - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) + 2x_{m,k}^2}{2x_{m,k}^2} J_\nu^2(x_{m,k})$$

и ортонормированные собственные вектор - функции оператора L_0 имеют вид

$$\frac{1}{J_\nu(x_{m,k})}\sqrt{\frac{2x_{m,k}^2}{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2\gamma_k + 2x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac{1}{4}}}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{t}J_\nu(x_{m,k}t)\varphi_k, J_\nu(x_{m,k})\varphi_k\right\} \quad \left(\begin{array}{ll} m = \overline{0,\infty}, & k = \overline{N,\infty} \\ m = \overline{1,\infty}, & k = \overline{1,N-1} \end{array}\right)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1,2 и $\alpha > 0$ то*

$$\sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \left| \int\limits_0^1 \frac{2x_{m,k}^2 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac{1}{4}\right\}}dt\right| +$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\int_0^1 \frac{2x_{0,k}^2 t J_\nu^2(x_{0,k}t)\,(q(t)\,\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{0,k})\left\{x_{0,k}^4+2x_{0,k}^2+2\gamma_k x_{0,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right\}}\right|<\infty. \qquad (3.2)$$

Доказательство. Положим $f_k(t)=(q(t)\,\varphi_k,\varphi_k)$. По лемме 2.1 $x_{m,k}\sim\pi m+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\quad\left(m=\overline{1,\infty}\right)$. Так что имея ввиду неравенство ([18], стр. 666) $\left|\frac{tJ_\nu^2(x_{m,k}t)}{J_\nu^2(x_{m,k})}\right|<c$, и условия 1, 2 получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_0^1 \frac{2x_{m,k}^2 t J_\nu^2(x_{m,k}t)\,(q(t)\,\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_k x_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right\}}dt\right|<$$

$$<c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{|f_k(t)|dt}{x_{m,k}^2+2+2\gamma_k+\frac{\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}}{x_{m,k}^2}}<c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{x_{m,k}^2}\int_0^1|f_k(t)|dt<\infty.$$

Для оценки второго слагаемого в (3.2) воспользуемся асимптотикой $x_{0,k}\sim\frac{\nu^2-\frac{9}{4}}{4}+\sqrt{\gamma_k-\sqrt{\gamma_k}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)}$ и $\gamma_k\sim ak^\alpha$. По условию леммы $\alpha>0$, так что обозначив это слагаемое через s будем иметь из условия 1

$$|s|<\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{x_{0,k}^2}\int_0^1|f_k(t)|dt<\infty.$$

Лемма доказана.

Предположим, что выполняются условия

$$\int_{1-\delta}^{1}\frac{|f_k(t)|}{cos\frac{\pi t}{2}}dt<\infty, \qquad (3.3)$$

$$\int_0^{\delta}\frac{|f_k(t)|}{t}dt<\infty. \qquad (3.4)$$

С помощью леммы 3.1 докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие теоремы 2.1. Если опера-торная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1-3, а также (3.3), (3.4), то имеет место следующая формула*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=-\frac{2\nu tr\ q(0)+tr\ q(1)}{4}. \qquad (3.5)$$

Доказательство. Из абсолютной сходимости ряда в (3.2) имеем

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\frac{2x_{m,k}^2tJ_\nu^2(x_{m,k}t)\,(q(t)\,\varphi_k,\varphi_k)\,dt}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_kx_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right\}}+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{2x_{m,k}^2tJ_\nu^2(x_{m,k}t)\,(q(t)\,\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_kx_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right\}}dt. \tag{3.6}$$

Вычислим сперва значение ряда

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{2tJ_\nu^2(x_{m,k}t)\,f_k(t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_kx_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right\}}dt.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{2tJ_\nu^2(x_{m,k}t)\,f_k(t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_kx_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right\}}.$$

Для каждой фиксированной k при $N\to\infty$ исследуем асимптотическое поведение функции

$$R_N(t)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{2tx_{m,k}^2J_\nu^2(x_{m,k}t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_kx_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right\}}.$$

Для того, чтобы вывести формулу для $R_N(t)$, выразим m-й член суммы $R_N(t)$ в виде вычета в точке $x_{m,k}$ некоторой функции комплекс-ного переменного z, имеющей полюсы в точках $x_{m,k}$ $\left(m=\overline{0,N-1}\right)$, при фиксированной k.

Рассмотрим следующую функцию

$$g(z)=\frac{2tzJ_\nu^2(tz)}{J_\nu(z)\left\{zJ_\nu'(z)+\left(\frac{1}{2}-z^2-\gamma_k\right)J_\nu(z)\right\}}. \tag{3.7}$$

Эта функция имеет полюсы в точках $x_{0,k,\dots,}x_{N-1,k},$ и $j_1,..,,j_N$ $(J_\nu(j_n)=0)$.

Вычет в точке j_n равен

$$\frac{2tj_nJ_\nu^2\left(tj_n\right)}{J_\nu'\left(j_n\right)\left(j_nJ_\nu'\left(j_n\right)+\left(\frac{1}{2}-j_n^2-\gamma_k\right)J_\nu\left(j_n\right)\right)}=\frac{2tJ_\nu^2\left(tj_n\right)}{J_\nu'\left(j_n\right)^2}=\frac{2tJ_\nu^2\left(tj_n\right)}{J_{\nu+1}^2\left(j_n\right)}.$$

Вычислим вычет в $x_{m,k}$. Имеем

$$\left(zJ_\nu'\left(z\right)+\left(\frac{1}{2}-z^2-\gamma_k\right)J_\nu\left(z\right)\right)'=J_\nu'\left(z\right)\left(\frac{3}{2}-z^2-\gamma_k\right)+zJ_\nu''\left(z\right)-2zJ_\nu\left(z\right)=$$

$$=-\frac{\nu}{z}J_\nu\left(z\right)\left(\frac{1}{2}-z^2-\gamma_k\right)-\nu J_\nu'\left(z\right)+J_{\nu-1}\left(z\right)\left(\frac{3}{2}-z^2-\gamma_k\right)+zJ_{\nu-1}'\left(z\right)-2zJ_\nu\left(z\right). \quad (3.8)$$

Обозначим функцию в (3.8) через $G\left(z\right)$. Подставляя $x_{m,k}$ вместо z, учитывая что $x_{m,k}$ является решением уравнения

$$zJ_\nu'\left(z\right)+\left(\frac{1}{2}-z^2-\gamma_k\right)J_\nu\left(z\right)=0,$$

и пользуясь $zJ_{\nu-1}'\left(z\right)=\left(\nu-1\right)J_{\nu-1}\left(z\right)-zJ_\nu\left(z\right)$, получим

$$G\left(x_{m,k}\right)=J_{\nu-1}\left(x_{m,k}\right)\left(\frac{3}{2}-x_{m,k}^2-\gamma_k\right)+\left(\nu-1\right)J_{\nu-1}\left(x_{m,k}\right)-$$

$$-3x_{m,k}J_\nu\left(x_{m,k}\right)=J_{\nu-1}\left(x_{m,k}\right)\left(\frac{1}{2}+\nu-x_{m,k}^2-\gamma_k\right)-3x_{m,k}J_\nu\left(x_{m,k}\right).$$

Согласно $J_{\nu-1}(z)=J_\nu'(z)+\frac{\nu}{z}J_\nu(z)$ имеем

$$G\left(x_{m,k}\right)=\left(J_\nu'\left(x_{m,k}\right)+\frac{\nu}{x_{m,k}}J_\nu\left(x_{m,k}\right)\right)\left[\nu+\frac{1}{2}-x_{m,k}^2-\gamma_k\right]-3x_{m,k}J_\nu\left(x_{m,k}\right)=$$

$$=\frac{\nu x_{m,k}J_\nu'\left(x_{m,k}\right)+\nu^2J_\nu\left(x_{m,k}\right)}{x_{m,k}}+$$

$$+\frac{\left[x_{m,k}J_\nu'\left(x_{m,k}\right)+\nu J_\nu\left(x_{m,k}\right)\right]\left[\frac{1}{2}-x_{m,k}^2-\gamma_k\right]-3x_{m,k}^2J_\nu\left(x_{m,k}\right)}{x_{m,k}}.$$

Так как $x_{m,k}$ удовлетворяет (2.4)

$$G\left(x_{m,k}\right)=-\frac{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2\gamma_k+2x_{m,k}^2-\gamma_k+\gamma_k^2-\nu^2+\frac{1}{4}}{x_{m,k}}J_\nu\left(x_{m,k}\right).$$

Таким образом,

$$\underset{z=x_{m,k}}{res}\, g(z) = -\frac{2tx_{m,k}^2 J_\nu^2(tx_{m,k})}{J_\nu^2(x_{m,k})\left(x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac{1}{4}\right)}.$$

Возьмем за контур интегрирования контур C. Согласно леммам 2.1 и 2.3, когда N достаточно велик $x_{N-1,k} < A_N < x_{N,k}$ и как известно $j_N < A_N < j_{N+1}$.

Легко проверить, что в окрестности нуля функция (3.7) будет иметь порядок $O(z^\nu) \quad (\nu \geq 1)$. Так что интеграл по малой полуокружности с центром в начале координат превратится в ноль при $r \to 0$. (r- радиус полуокружности). А также, так как функция (3.7) нечетная, то интеграл по левой части контура C обратится в ноль.

Далее, если $z = u + iv$, то при большом $|v|$ и при $u \geq 0$ подинтеграль-ное выражение будет иметь порядок $O\left(e^{|v|(2t-2)}\right)$ и, следовательно, для заданного значения A_N интегралы, взятые вдоль верхней и нижней сторон прямоугольника, стремятся к нулю при $B \to \infty$ $(0 < t < 1)$.

Таким образом, получаем следующую формулу

$$T_N(t) - R_N(t) = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{2tzJ_\nu^2(tz)\,dz}{J_\nu(z)\left\{zJ_\nu'(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right)J_\nu(z)\right\}},$$

$$T_N(t) = \sum_{m=1}^{N} \frac{2tJ_\nu^2(tj_m)}{J_{\nu+1}^2(j_m)}. \tag{3.9}$$

На рассматриваемом контуре при $x_{N-1,k}^{-1+\varepsilon} \leq t < 1$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $|tz| \to \infty$. Поэтому в подинтегральном выражении можно заменить бесселевы функции соответствующими асимптотиками при больших аргументах. Тогда учитывая

$$J_\nu^2(z) = \frac{2}{\pi z}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sin(2z - \nu\pi)}{2}\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

при $N \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{B\to\infty} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{2tzJ_\nu^2(tz)}{J_\nu(z)\left\{zJ_\nu'(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right)J_\nu(z)\right\}} dz \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi i} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{1 + \sin(2zt - \nu\pi)}{-z\left(1 + \sin(2z - \nu\pi)\right)} dz \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{-\left(A_N + iv\right)\left(1+\cos 2iv\right)} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(2tA_N - \nu\pi + 2tiv\right)}{\left(A_N + iv\right)\left(1+\cos 2iv\right)} dv \tag{3.10}$$

Обозначим правую часть (3.10) через J. Имеем

$$|J| < \frac{2}{A_N}\int\limits_0^{\infty} \frac{dv}{ch2v} + \frac{const}{A_N}\int\limits_0^{\infty} \frac{ch2tv}{ch2v} = \frac{\pi}{2A_N} + \frac{const}{A_N}\frac{1}{\cos\frac{\pi t}{2}}. \tag{3.11}$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 R_N\left(t\right) f_k\left(t\right) dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 T_N\left(t\right) f_k\left(t\right) dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{2tzJ_\nu^2\left(tz\right)}{J_\nu\left(z\right)\left\{zJ_\nu'\left(z\right) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right)J_\nu\left(z\right)\right\}} dz\right) f_k\left(t\right) dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 T_N\left(t\right) f_k\left(t\right) dt - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{A_N^{-1+\varepsilon}} \left(T_N\left(t\right) - R_N\left(t\right)\right) f_k\left(t\right) dt -$$

$$-\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1 \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{2tzJ_\nu^2\left(tz\right)}{J_\nu\left(z\right)\left\{zJ_\nu'\left(z\right) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right)J_\nu\left(z\right)\right\}} dz\right] f_k\left(t\right) dt. \tag{3.12}$$

Из оценки (3.11), при выполнении условия (3.3), имеем

$$\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1 \left|\int\limits_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{2tzJ_\nu^2\left(tz\right)}{J_\nu\left(z\right)\left\{zJ_\nu'\left(z\right) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right)J_\nu\left(z\right)\right\}} dz f_k\left(t\right) dt\right| \le$$

$$\le \lim_{N\to\infty}\frac{\pi}{2A_N}\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1 |f_k\left(t\right)| dt + \lim_{N\to\infty}\frac{const}{A_N}\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1 \frac{|f_k\left(t\right)|}{\cos\frac{\pi t}{2}} dt = 0. \tag{3.13}$$

Далее, известно следующее соотношение при больших N (см. [18], стр. 642)

$$T_N\left(t\right) \sim \frac{1}{2t}\left[1 - \frac{\sin 2A_N t}{\sin \pi t}\right].$$

Так что, если выполняется (3.4), то

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{A_N^{-1+\varepsilon}} T_N\left(t\right) f_k\left(t\right)dt=0. \tag{3.14}$$

В силу условия 2 ($\left\|q^{(l)}\left(t\right)\right\|_1<const$), неравенства (3.2), а также асимптотики $x_{m,k}$.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{A_N^{-1+\varepsilon}} R_N\left(t\right) f_k\left(t\right)dt=0. \tag{3.15}$$

Ранее было получено, что при выполнении условий 1-3, (см. [23])

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{1} T_N\left(t\right) f_k\left(t\right)dtz=-\frac{2\nu f_k\left(0\right)+f_k\left(1\right)}{4}. \tag{3.16}$$

Итак, из (3.12)-(3.16) имеем

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{1} R_N\left(t\right) f_k\left(t\right)dt=-\frac{2\nu f_k\left(0\right)+f_k\left(1\right)}{4}. \tag{3.17}$$

Таким образом

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{2tJ_\nu^2\left(x_{m,k},t\right)f_k\left(t\right)}{J_\nu^2\left(x_{m,k}\right)\left[x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_k x_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right]}dt=$$

$$=\sum_{k=N}^{\infty}-\frac{2\nu f_k\left(0\right)+f_k\left(1\right)}{4}. \tag{3.18}$$

Подобным образом получаем (на этот раз контур C будет иметь вырез только в начали координат, так как уравнение (2.5) не будет иметь мнимых корней)

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\frac{2tJ_\nu^2\left(x_{m,k},t\right)f_k\left(t\right)}{J_\nu^2\left(x_{m,k}\right)\left[x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_k x_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac{1}{4}\right]}dt=$$

$$=-\sum_{k=1}^{N-1}-\frac{2\nu f_k\left(0\right)+f_k\left(1\right)}{4}. \tag{3.19}$$

Объединяя (3.17) и (3.18) окончательно имеем

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n_m}\left(\mu_n-\lambda_n\right)=-\frac{2\nu tr\,q\left(0\right)+tr\,q\left(1\right)}{4}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Горбачук В.И., Рыбак М.А. О граничных задачах для операторного уравнения Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Прямые и обратные задачи теории рассеяния. Киев. 1981. С.3-13.

[2] Рыбак М.А. Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма-Лиувилля // Укр. мат. журн. 1980. 32, №2. С.248-252.

[3] Алиев Б.А. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. 2006. 58, №8. С.1146-1152.

[4] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР. 1953, 88, №4. С. 593-596.

[5] Дикий Л.А. Об одной формуле Гельфанда-Левитана, // УМН. 1953. 8, №2. С. 119-123.

[6] Гасымов М.Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов. ДАН СССР. 1963. 150, №6. С. 1202-1205.

[7] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. ДАН СССР. 1967. 176, №2. С. 258-262.

[8] Максудов Ф.Г., Байрамоглы М., Адыгезалов А.А. О регуляризованном следе оператора Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом // ДАН СССР. 1984. 277, №4. С. 795-799.

[9] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. зам. 2001. 69. С. 427-442.

[10] Дубровский В.В. Абстрактные формулы регуляризованных следов элементических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях //Диф. Уравнения. 1991. 27-12. С. 2164-2166.

[11] Садовничий В.А., Подольскй В.Е. Слдеы операторов с относительно компактным возмущением. Матем. сборник. 2002. 193, №2. С. 129-152

[12] Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов успехи матем. наук. 2006. 61, вып. 5(371). С. 89-156

[13] Байрамоглы М., Адыгезалов А.А., Албайрак И. Формула II-го регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии // Методы функционального анализа и топологии. 2000. 6, №3. С. 1-8.

[14] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.:Мир. 1971. 371С.

[15] Yakubov S., Yakubov Ya. Differential operator equations. Ordinary and partial dif. Equations. Boca Raton: Chapman and Hall /CRC, 2000. 568p.

[16] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.:Наука. 1969. 528 с.

[17] Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5 т. М.: Наука. т.5. 655с.

[18] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. В 2 т. М.:ИЛ. 1949. т.1. 798с.

[19] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2 т. М. ИЛ. II часть. т.2. 1978. 431 с.

[20] Градистейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. 1971. 1108 с.

[21] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма-Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. матем. журн. 1972. 24, №3. С. 291-305.

[22] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка. 1984. 284 с.

[23] Гашимов И.Ф. Вычисление регуляризованного следа операторного уравнения Штурма-Лиувилля с особенностью на конечном отрезке. М. 1989. 37 С. Деп. в ВИНИТИ 12.12.89, №7340-В89.

Aslanova N.M.

Asymptotic distribution of eigenvalues and regularized trace of boundary-value problem with spectral parameter dependent boundary condition for Bessel's operator equation

In the paper the asymptotic behavior of distribution function for boundary-value problem with eigenvalue parameter dependent boundary condition is studied. Also the regularized trace formula for this problem is obtained.

Асланова Нигяр Махар кызы

Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Ф. Агаева, 9,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана.
Отдел: Дифференциальные уравнения.
Уч. степень: к.ф.-м.н, старший научный сотрудник.
Домашний тел.: (99412) 431 41 12,
Дом. адрес: AZ0010, пр. Азадлыг, 97, блок 9, кв.49.
E-mail: nigar.aslanova@yahoo.com