Н. Б. Керимов, Некоторые свойства собственных и присоединенных функций обыкновенных дифференциальных операторов, *Докл. АН СССР*, 1986, том 291, номер 5, 1054–1056

УДК 517.927.25 МАТЕМАТИКА

Н.Б. КЕРИМОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 21 X 1985)

В настоящей работе приведены оценки собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора порядка n, $n \geqslant 2$, найдены соотношения между этими функциями и их производными в различных метриках.

Пусть G – конечный или бесконечный интервал в R^1. Обозначим через D_n класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, $n \geqslant 2$, в каждом конечном замкнутом подынтервале интервала G. Пусть L – заданный на G формальный дифференциальный оператор порядка n, $n \geqslant 2$,

$$Lu = u^{(n)} + p_1(x)\,u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,u^{(1)} + p_n(x)\,u$$

с комплекснозначными коэффициентами. Предполагается, что $p_k(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(G)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Следуя В.А. Ильину [1], мы исходим из обобщенной трактовки собственных и присоединенных функций оператора L. При такой трактовке собственных и присоединенных функций условия, определяющие конкретную собственную или присоединенную функцию, могут иметь нелокальный характер или любым способом зависеть от спектрального параметра.

Под собственной функцией оператора L, отвечающей комплексному собственному значению λ, мы понимаем любую не равную тождественному нулю комплекснозначную функцию $u_0(x)$ из класса D_n, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению

$$Lu_0 + \lambda u_0 = 0.$$

Аналогично, под присоединенной функцией порядка m, $m \geqslant 1$, отвечающей тому же собственному значению λ и собственной функции $u_0(x)$, мы понимаем любую комплекснозначную функцию $u_m(x)$ из класса D_n, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению

$$Lu_m + \lambda u_m = u_{m-1}.$$

Каждому собственному значению λ может отвечать одна или более присоединенных функций.

Обозначим через μ специально выбранный корень степени n из комплексного собственного числа λ, который мы определим следующим образом:

$$\mu = \begin{cases} [(-1)^{n/2}(-\lambda)]^{1/n}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ [(-i)\lambda]^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно и } \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \\ [i\lambda]^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно и } \operatorname{Im}\lambda < 0, \end{cases}$$

где всюду

$$[r\exp(i\theta)]^{1/n} = r^{1/n}\exp\left(\frac{i\theta}{n}\right) \text{ при } -\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi.$$

Ниже всюду зависимость от оператора L понимается в смысле зависимости от коэффициентов и порядка оператора L.

Основными результатами настоящей работы являются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{mes} G \leqslant +\infty$, $p_k(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(G)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *и существует постоянная B такая, что для каждого собственного значения λ справедливо неравенство*

$$(1) \qquad |\operatorname{Im} \mu| \leqslant B.$$

Если фиксирован произвольный интервал G_1, $\overline{G}_1 \subset G$, то для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ существует постоянная C_m, зависящая лишь от интервала G_1, от постоянной B из неравенства (1), *от оператора L и от порядка m рассматриваемой присоединенной функции (при $m = 0$ речь идет о собственной функции), такая, что при всех $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, \ldots, m$ справедливы оценки*

$$(2) \qquad \| u_{m-j}^{(s)} \|_{L_p(G_1)} \leqslant C_m (1 + |\sqrt[n]{\lambda}|)^{jn+s} \| u_m \|_{L_p(G_1)}, \quad n \geqslant 3;$$

$$(3) \qquad \| u_{m-j}^{(s)} \|_{L_p(G_1)} \leqslant C_m (1 + |\sqrt{\lambda}|)^{j+s} \| u_m \|_{L_p(G_1)}, \quad n = 2;$$

$$(4) \qquad \sup_{x \in G_1} | u_{m-j}^{(s)}(x) | \leqslant C_m (1 + |\sqrt[n]{\lambda}|)^{1/p + jn + s} \| u_m \|_{L_p(G_1)}, \quad n \geqslant 3;$$

$$(5) \qquad \sup_{x \in G_1} | u_{m-j}^{(s)}(x) | \leqslant C_m (1 + |\sqrt{\lambda}|)^{j+s} \| u_m \|_{L_p(G_1)}, \quad n = 2.$$

Теорема 2. *Пусть удовлетворяются условия теоремы* 1. *Если фиксированы два произвольных интервала G_1 и G_2 ($\overline{G}_2 \subset G_1$, $\overline{G}_1 \subset G$), то для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ существует постоянная C_m, зависящая лишь от интервалов G_1 и G_2, от постоянной B из неравенства* (1), *от оператора L и от порядка m рассматриваемой присоединенной функции (при $m = 0$ речь идет о собственной функции), такая, что при всех $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, \ldots, m$ справедливы оценки*

$$(6) \qquad \| u_{m-j}^{(s)} \|_{L_p(G_2)} \leqslant C_m (1 + |\sqrt[n]{\lambda}|)^{j(n-1)+s} \| u_m \|_{L_p(G_1)};$$

$$(7) \qquad \sup_{x \in G_2} | u_{m-j}^{(s)}(x) | \leqslant C_m (1 + |\sqrt[n]{\lambda}|)^{j(n-1)+s} \| u_m \|_{L_p(G_1)}.$$

Теорема 3. *Если* $\operatorname{mes} G < +\infty$, $p_k(x) \in L_1(G)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *и удовлетворяется условие* (1), *то утверждения теорем* 1, 2 *справедливы и для случая, когда* $G_1 = G$.

Доказательства теорем 1–3 основаны в основном только на использовании асимптотических формул фундаментальной системы решений уравнения $Lu + \lambda u = 0$ при больших по модулю значениях λ [2].

Замечание. Для оператора n-го порядка с гладкими коэффициентами впервые оценки собственных и присоединенных функций получены в [1, 3]; для оператора второго порядка ряд таких оценок получен в работах [4–7]. В работах [8, 9] получены оценки собственных и присоединенных функций, подобные (2)–(7), при некоторых иных предположениях, в частности относительно коэффициента $p_1(x)$ и λ. Оценки типа (2)–(7) использовались многими авторами при исследовании вопросов сходимости биортогональных разложений функций.

Автор выражает глубокую признательность проф. В.А. Ильину за постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
4 XI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – ДАН, 1976, т. 227, № 4, с. 796–799. 2. *Рыхлов В.С.* В кн.: Дифференциальные уравнения и теория функций. Саратов, 1980, вып. 2, с. 58–75. 3. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 771–794. 4. *Ломов И.С.* – Там же, 1982, т. 18, № 10, с. 1684–1694. 5. *Йо И.* – ДАН, 1980, т. 250, № 1, с. 29–31. 6. *Лажетич Н.* – Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 11, с. 1978–1983. 7. *Тихомиров В.В.* – ДАН, 1983, т. 273, № 4, с. 807–810. 8. *Komornik V.* – Acta Sci. Math, 1983, vol. 45, p. 261–271. 9. *Ломов И.С.* – Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 5, с. 903–906.

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

А.Ф. НИКИФОРОВ, С.К. СУСЛОВ, В.Б. УВАРОВ

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

(Представлено академиком А.А. Самарским 10 IV 1985)

Классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита) – простейшие решения дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

где $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ – полиномы не выше второй и первой степени соответственно, λ – постоянная. Их теория допускает следующее обобщение. Заменим (1) разностным уравнением на сетке $x = x(s)$ с переменным шагом $\Delta x(s) = x(s+h) - x(s)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma[x(s)]}{x(s+h/2)-x(s-h/2)}\left[\frac{y(s+h)-y(s)}{x(s+h)-x(s)} - \frac{y(s)-y(s-h)}{x(s)-x(s-h)}\right] + \\ &+ \frac{\tau[x(s)]}{2}\left[\frac{y(s+h)-y(s)}{x(s+h)-x(s)} + \frac{y(s)-y(s-h)}{x(s)-x(s-h)}\right] + \lambda y(s) = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Полиномиальные решения уравнения (2) можно построить по той же логической схеме, что и решения уравнения (1), с заменой производных на соответствующие разностные отношения [1, 2].

1. Линейной заменой $s \to hs$ разностное уравнение (2) приводится к виду

$$\sigma[x(s)]\,\frac{\Delta}{\Delta x(s-½)}\left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \frac{\tau[x(s)]}{2}\left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \lambda y(s) = 0, \tag{3}$$

где $\Delta y(s) = y(s+1) - y(s)$, $\nabla y(s) = \Delta y(s-1)$, $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ – полиномы не выше второй и первой степени соответственно, λ – постоянная. Для некоторых классов сеток $x(s)$ это уравнение обладает п р о с т ы м с в о й с т в о м: в результате разностного дифференцирования (3) получаем уравнение того же типа.

Т е о р е м а 1. *Пусть $y(s)$ – решение уравнения (3), $x(s)$ удовлетворяет уравнению*

$$½[x(s+1) + x(s)] = \alpha x(s+½) + \beta$$

(α, β – *постоянные*).