Н. Б. Керимов, О необходимых и достаточных условиях базисности систем корневых функций дифференциального оператора, *Дифференц. уравнения*, 1996, том 32, номер 1, 37–43

1996. Т. 32. № 1. С. 37 —43

УДК 517.984.5

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Н. Б. Керимов

Необходимые и достаточные условия безусловной базисности (и бесселевости) в пространстве L_2 систем корневых функций обыкновенного линейного, вообще говоря, несамосопряженного дифференциального оператора исследовались в работах [1—6]. В частности, показано, что известное условие "сумма единиц" является необходимым условием безусловной базисности.

В настоящей работе удалось показать, что упомянутое условие является необходимым условием базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка.

1. Основные определения. Формулировка результатов. На произвольном конечном интервале G вещественной оси рассмотрим оператор

$$Lu(x) = u''(x) + q(x)u(x) \tag{1.1}$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$. Следуя работам В.А.Ильина [1,2], будем исходить из обобщенной трактовки собственных и присоединенных функций (СПФ) оператора (1.1), допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий.

Обозначим через $\mathcal{D}$ класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными в замкнутом интервале $\bar{G}$. Под собственной функцией оператора (1.1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $y_0(x) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_0(x) + \lambda y_0(x) = 0$.

Аналогично под присоединенной функцией этого оператора порядка m $(m \geq 1)$, отвечающей тому же собственному значению λ и собственной функции $y_0(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $y_m(x) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_m(x) + \lambda y_m(x) = y_{m-1}(x)$.

Каждой собственной функции может соответствовать одна или более присоединенных функций, отвечающих тому же собственному значению.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_n(x)\}$, состоящую из понимаемых в указанном нами обобщенном смысле СПФ оператора (1.1). Потребуем, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $m \geq 1$ эта система содержала также соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка меньше m. Это означает, что каждый элемент $u_n(x)$ системы $\{u_n(x)\}$ принадлежит $\mathcal{D}$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_n(x) + \lambda_n u_n(x) = \theta_n u_{n-1}(x), \tag{1.2}$$

где число θ_n равно либо нулю (в этом случае называем $u_n(x)$ собственной функцией оператора L), либо единице (в этом случае требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, и называем $u_n(x)$ присоединенной функцией оператора L).

Порядок присоединенной функции $u_n(x)$ обозначим через m_n (если $u_n(x)$ — собственная функция, то считаем, что $m_n = 0$).

Хорошо известно (см., например, [7, с. 306]), что если система $\{u_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$ и минимальна, то существует и притом единственная система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$. Символом L^* обозначим оператор, формально сопряженный к оператору L: $L^*v(x) = v''(x) + \overline{q(x)}v(x)$. В дальнейшем наряду с собственными значениями λ_n будем использовать спектральный параметр $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, где $\sqrt{r\exp(i\varphi)} = \sqrt{r}\exp(i\varphi/2)$ при $-\pi/2 \le \varphi < 3\pi/2$.

В работе [4] доказано, что при условии равномерной ограниченности длины любой цепочки корневых функций отсутствие конечных точек сгущения последовательности $\{\mu_n\}$ является необходимым условием базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n(x)\}$. Следовательно, в этом случае числа μ_n можно занумеровать в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом кратности.

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы.

Основная теорема. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и пусть выполнены следующие условия:*

1) существует целое неотрицательное число N_0 такое, что для всех $n \ge 1$ справедливо $m_n \le N_0$;

2) последовательность $\{|\mu_n|\}$ является монотонно возрастающей;

3) система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$, состоит из СПФ оператора L^*.

Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то существует постоянная C_1 такая, что для любого $\mu \ge 0$

$$\sum_{\mu \le |\mu_n| \le \mu+1} 1 \le C_1. \tag{1.3}$$

Третье условие основной теоремы означает, что каждая функция $v_n(x)$ принадлежит $\mathfrak{D}$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$L^*v_n(x) + \overline{\lambda_n}v_n(x) = \hat{\theta}_n v_{n+1}(x),$$

где число $\hat{\theta}_n$ равно либо нулю (в этом случае $v_n(x)$ называем собственной функцией оператора L^*), либо единице (тогда требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n+1}$, и $v_n(x)$ называем присоединенной функцией оператора L^*). Число $\hat{\theta}_n$ связано с введенным выше числом θ_n соотношением $\hat{\theta}_n = \theta_{n+1}$.

Теорема 1.1. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Если выполняются условия 1) — 3) основной теоремы и система $\{v_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$, то необходимым и достаточным условием базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n(x)\}$ является существование постоянных C_0, C_1 и C_2, обеспечивающих справедливость неравенств (1.3),*

$$|\mathrm{Im}\mu_n| \le C_0 \qquad \textit{(для всех номеров n)}, \tag{1.4}$$

$$\|u_n\|_{L_2(G)}\|v_n\|_{L_2(G)} \le C_2 \qquad \textit{(для всех номеров n)}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Пусть выполняются условия 1) — 3) основной теоремы и $\{v_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$. Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то она также образует безусловный базис этого пространства.*

Последние две теоремы являются следствиями из основной теоремы настоящей работы и теорем 1 — 3 работы [4].

Замечание 1.1. Второе условие основной теоремы может быть заменено любым из следующих условий:

2а) существует натуральное число n_0 такое, что при всех $n \ge n_0$ справедливо неравенство $|\mu_{n+1}| \ge |\mu_n|$;

2б) существует натуральное число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство $\mathrm{Re}\mu_{n+1} \geq \mathrm{Re}\mu_n$.

Замечание 1.2. Сформулированные выше результаты легко переносятся на случай оператора

$$Lu(x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x),$$

где $p_1(x)$ абсолютно непрерывна на замкнутом интервале $\bar{G}$ и $p_2(x) \in L_1(G)$ (см. [1]).

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Всюду в дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что $G = (0;1)$. Для простоты записи норму в пространстве $L_2(0;1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$. Как обычно, (f,g) означает скалярное произведение в соответствующем гильбертовом пространстве. Везде под C (с индексом) будем понимать положительную постоянную, кроме того, $O(1)$ будет означать ограниченную функцию (не обязательно одну и ту же) своих аргументов.

Лемма 2.1. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и пусть имеет место (1.4). Тогда при $x, t, x+t \in [0;1]$ и μ_n, удовлетворяющих условию $|\mu_n| \geq 1$, справедливо представление*

$$u_n(x+t) = u_n(t)\cos\mu_n x + \mu_n^{-1}u_n'(t)\sin\mu_n x + (x + |\mu_n|^{-1})\|u_n\|O(1). \tag{2.1}$$

Доказательство. Умножив обе части равенства

$$u_n''(\xi+t) + q(\xi+t)u_n(\xi+t) + \mu_n^2 u_n(\xi+t) = \theta_n u_{n-1}(\xi+t)$$

на функцию $\sin\mu_n(\xi - x)$, проинтегрировав полученное тождество по $\xi \in [0;x]$ и применив формулу интегрирования по частям к интегралу $\int\limits_0^x u_n''(\xi+t)\sin\mu_n(\xi-x)\,d\xi$, после несложных выкладок получим

$$u_n(x+t) = u_n(t)\cos\mu_n x + \mu_n^{-1}u_n'(t)\sin\mu_n x + \mu_n^{-1}\int\limits_0^x [\theta_n u_{n-1}(\xi+t) - q(\xi+t)u_n(\xi+t)]\sin\mu_n(\xi-x)d\xi. \tag{2.2}$$

В работе [8] (см. также [9]), в частности, доказаны оценки

$$\max_{0\leq x\leq 1}|u_n(x)| \leq C_3\|u_n\|, \qquad \max_{0\leq x\leq 1}|u_n'(x)| \leq C_4|\mu_n|\|u_n\|, \tag{2.3}$$

$$\max_{0\leq x\leq 1}|\theta_n u_{n-1}(x)| \leq C_5|\mu_n|\|u_n\|. \tag{2.4}$$

Следовательно, последний член в представлении (2.2) равен $(x + |\mu_n|^{-1})\|u_n\|O(1)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $\mu \geq 1$, $0 \leq h \leq 1$, y, $y+h \in [0;1]$ и $Q = \{\Lambda : \mathrm{Re}\Lambda > 0,\ |\mathrm{Im}\Lambda| \leq C_0,\ \mu \leq |\Lambda| \leq \mu+1\}$. Тогда для всех $\Lambda \in Q$ справедливы равенства*

$$2\int\limits_y^{y+h} \cos\Lambda x\cos\mu(x-y)\,dx = h\cos\Lambda y + (h^2 + \mu^{-1})O(1), \tag{2.5}$$

$$2\int\limits_y^{y+h} \sin\Lambda x\cos\mu(x-y)dx = h\sin\Lambda y + (h^2 + \mu^{-1})O(1). \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть z — любое комплексное число. Будем использовать легко доказуемые неравенства

$$|\sin z| \leq 2\exp(|\mathrm{Im}z|), \quad |\cos z| \leq 2\exp(|\mathrm{Im}z|), \tag{2.7}$$

$$|\sin z| \leq 4|z|\exp(|\mathrm{Im} z|), \tag{2.8}$$

$$||z| - z| \leq 2|\mathrm{Im} z| \qquad (\mathrm{Re} z > 0). \tag{2.9}$$

Поскольку $|\mathrm{Im}(\Lambda + \mu)| = |\mathrm{Im}(\Lambda - \mu)| = |\mathrm{Im}\Lambda| \leq C_0$ и $0 \leq h \leq 1$, то из оценок (2.7) и (2.9) следует

$$\sin(\Lambda + \mu)h = O(1), \quad \cos(\Lambda + \mu)h = O(1), \tag{2.10}$$

$|\Lambda - \mu| \leq ||\Lambda| - \Lambda| + ||\Lambda| - \mu| \leq 2|\mathrm{Im}\Lambda| + 1 \leq 2C_0 + 1$ или, что то же самое,

$$\Lambda - \mu = O(1). \tag{2.11}$$

Кроме того, отметим очевидное неравенство

$$(\Lambda + \mu)^{-1} = \mu^{-1}O(1). \tag{2.12}$$

Из оценок (2.8) и (2.11) вытекает

$$\sin(\Lambda - \mu)x = (\Lambda - \mu)x\exp(|\mathrm{Im}\Lambda|x)O(1) = xO(1). \tag{2.13}$$

Тогда в силу (2.10), (2.12) и (2.13) имеем

$$\int_0^h \cos(\Lambda + \mu)x dx = \frac{\sin(\Lambda + \mu)h}{\Lambda + \mu} = \mu^{-1}O(1), \int_0^h \sin(\Lambda + \mu)x dx = \frac{1 - \cos(\Lambda + \mu)h}{\Lambda + \mu} = \mu^{-1}O(1),$$

$$\int_0^h \sin^2\frac{(\Lambda - \mu)x}{2}dx = O(1)\int_0^h x^2 dx = h^3 O(1), \int_0^h \sin(\Lambda - \mu)x dx = O(1)\int_0^h x dx = h^2 O(1).$$

Таким образом,

$$E_1 = 2\int_0^h \cos\Lambda x\cos\mu x dx = \int_0^h \cos(\Lambda - \mu)x dx + \int_0^h \cos(\Lambda + \mu)x dx = h-$$

$$-2\int_0^h \sin^2\frac{(\Lambda - \mu)x}{2}dx + \mu^{-1}O(1) = h + (h^3 + \mu^{-1})O(1), \quad E_2 = 2\int_0^h \sin\Lambda x\cos\mu x dx = (h^2 + \mu^{-1})O(1).$$

Используя последние два равенства, окончательно получим

$$2\int_y^{y+h} \cos\Lambda x\cos\mu(x - y)dx = 2\int_0^h \cos\Lambda(x + y)\cos\mu x dx = E_1\cos\Lambda y - E_2\sin\Lambda y = h\cos\Lambda y + (h^2 + \mu^{-1})O(1).$$

При выводе этого равенства учитываются оценки $\cos\Lambda y = O(1)$, $\sin\Lambda y = O(1)$. Равенство (2.5) доказано, справедливость (2.6) устанавливается совершенно аналогично.

Лемма 2.3. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Тогда при $\mu \geq 1$, $0 \leq y \leq h$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq y + r \leq y + r + h \leq 1$ для всех $\mu_n \in Q$ (Q — множество, введенное в формулировке леммы 2.2) имеет место равенство*

$$\int_0^1 u_n(t)\theta_{y,r}^{\mu,h}(t)dt = hu_n(y + r) + (h^2 + \mu^{-1})||u_n||O(1), \tag{2.14}$$

где

$$\theta_{y,r}^{\mu,h}(t) = \begin{cases} 2\cos\mu(t - y - r) & \text{при} \quad t \in [y + r; y + r + h], \\ 0 & \text{при} \quad t \overline{\in} [y + r; y + r + h]. \end{cases}$$

Доказательство. Учитывая определение функции $\theta^{\mu,h}_{y,r}(t)$ и представление (2.1), преобразуем левую часть (2.14):

$$\int_0^1 u_n(t)\theta^{\mu,h}_{y,r}(t)dt = 2\int_{y+r}^{y+r+h} u_n(t)\cos\mu(t-y-r)dt = 2\int_y^{y+h} u_n(x+r)\cos\mu(x-y)dx =$$

$$= 2u_n(r)\int_y^{y+h}\cos\mu_n x\cos\mu(x-y)dx + 2\mu_n^{-1}u_n'(r)\int_y^{y+h}\sin\mu_n x\cos\mu(x-y)dx + 2\int_y^{y+h}(x+|\mu_n|^{-1})dx\|u_n\|O(1).$$

Отсюда и из (2.5), (2.6) вытекает

$$\int_0^1 u_n(t)\theta^{\mu,h}_{y,r}(t)dt = h(u_n(r)\cos\mu_n y + \mu_n^{-1}u_n'(r)\sin\mu_n y) + (h^2+\mu^{-1})\|u_n\|O(1). \tag{2.15}$$

Отметим, что при получении (2.15) необходимо также учесть оценки (2.3).

Утверждение леммы 2.3 следует из сопоставления (2.15) и (2.1).

Лемма 2.4. *Если последовательности $\{\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{\psi_k\}_1^\infty$ с элементами из гильбертова пространства H биортогональны и $\{\varphi_k\}_1^\infty$ образует базис пространства H, то существует постоянная C такая, что для всех f, $g\in H$ и натуральных чисел l и p $(l<p)$ справедливо неравенство* $|\sum_{k=l}^{p}(f,\psi_k)(\varphi_k,g)|\le C\|f\|_H\|g\|_H$.

Доказательство. Любой вектор $f\in H$ разлагается в сходящийся по норме ряд $f = \sum_{k=1}^{\infty}(f,\psi_k)\varphi_k$, и, стало быть, для любого $g\in H$ числовой ряд $(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\psi_k)(\varphi_k,g)$ сходится.

Положим $\Omega_m(f,g)=\sum_{k=1}^{m}(f,\psi_k)(\varphi_k,g)$ $(m=1,2,\ldots)$, $\Omega_m(f,g)$ является билинейным функционалом, и, кроме того, при любых $f,g\in H$ существует конечный предел $\lim_{m\to\infty}\Omega_m(f,g) = (f,g)$. Следовательно, существует постоянная C' такая, что для всех f, $g\in H$ и $m = 1,2,\ldots$ имеет место неравенство $|\Omega_m(f,g)|\le C'\|f\|_H\|g\|_H$ (см. доказательство теоремы 2 из [10, с.99]). Отсюда следует, что для всех f, $g\in H$ $|\sum_{k=l}^{p}(f,\psi_k)(\varphi_k,g)| = |\Omega_p(f,g)-\Omega_{l-1}(f,g)| \le |\Omega_p(f,g)|+|\Omega_{l-1}(f,g)|\le 2C'\|f\|_H\|g\|_H$.

3. Доказательство основной теоремы. В работе [4] доказано, что если система $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(0;1)$ и выполняются условия 1) и 3) основной теоремы, то последовательность $\{\mu_n\}$ не имеет конечных точек сгущения и удовлетворяется условие типа Карлемана $|\mathrm{Im}\mu_n|\le C_0$ $(n=1,2,\ldots)$. Отсюда и из определения чисел μ_n следует, что последовательность $\{|\mu_n|\}$ также не имеет конечных точек сгущения. Следовательно, учитывая второе условие основной теоремы, приходим к выводу: существует натуральное число n_1 такое, что при всех $n\ge n_1$ имеют место неравенства $|\mu_n|\ge 1$, $\mathrm{Re}\mu_n>0$.

Пусть $N>1+\sqrt{|\mu_{n_1}|}$ — некоторое натуральное число (точное значение которого определим позже), $\mu\ge N^2$ и $0\le y\le 1/N$. Положим $\theta_{y,k}(t,\mu)=\theta^{\mu,1/N}_{y,k/N}(t)$ $(k=0,1,\ldots,N-2)$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^1\theta^2_{y,k}(t,\mu)dt\le 4N^{-1}\qquad (k=0,1,\ldots,N-2). \tag{3.1}$$

Из леммы 2.3 следует, что при $\mu\le|\mu_n|\le\mu+1$ и $k=0,1,\ldots,N-2$

$$(u_n,\theta_{y,k})=\int_0^1 u_n(t)\theta_{y,k}(t,\mu)dt = N^{-1}u_n(y+k/N)+(N^{-2}+\mu^{-1})\|u_n\|O(1).$$

Отсюда и из условия $\mu\ge N^2$ заключаем, что при $\mu\le|\mu_n|\le\mu+1$ и $k=0,1,\ldots,N-2$ справедливо

$$(u_n,\theta_{y,k}) = N^{-1}u_n(y+k/N)+N^{-2}\|u_n\|O(1). \tag{3.2}$$

Аналогичное равенство при тех же условиях имеет место и для функций биортогонально сопряженной системы $\{v_n(x)\}$:

$$(\theta_{y,k}, v_n) = N^{-1}\overline{v_n(y+k/N)} + N^{-2}\|v_n\|O(1). \tag{3.3}$$

Поскольку $\{u_n(x)\}$ — базис пространства $L_2(0;1)$, а $\{v_n(x)\}$ — биортогонально сопряженная система, то (см., например, [11, с. 370])

$$\sup_m \|u_m\|\|v_m\| = C_6 < \infty. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание первую оценку из (2.3) и аналогичную оценку $\max\limits_{0\le x\le 1} |v_n(x)| \le C_7\|v_n\|$, из равенств (3.2) — (3.4) получим, что при $\mu \le |\mu_n| \le \mu+1$ и $k = 0, 1, \ldots, N-2$ справедливо равенство

$$(u_n, \theta_{y,k})(\theta_{y,k}, v_n) = N^{-2}u_n(y+k/N)\overline{v_n(y+k/N)} + N^{-3}O(1). \tag{3.5}$$

Пусть $l(\mu) = \min\{n : |\mu_n| \ge \mu\}$ и $p(\mu) = \max\{n : |\mu_n| \le \mu+1\}$. Так как последовательность $\{|\mu_n|\}$ монотонно возрастает, то в силу леммы 2.4 и оценки (3.1) имеем

$$\Big|\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} (u_n, \theta_{y,k})(\theta_{y,k}, v_n)\Big| = \Big|\sum_{n=l(\mu)}^{p(\mu)} (u_n, \theta_{y,k})(\theta_{y,k}, v_n)\Big| \le C_8 \int_0^1 \theta_{y,k}^2(t,\mu)dt \le 4C_8N^{-1}, \tag{3.6}$$

или в силу (3.5) $\Big|N^{-2} \sum\limits_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} u_n(y+k/N)\overline{v_n(y+k/N)} + N^{-3}O(1) \sum\limits_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} 1\Big| \le 4C_8N^{-1}$.

Учитывая последнюю оценку, при $\mu \ge N^2$, $0 \le y \le N^{-1}$ и $k = 0, 1, \ldots, N-2$ имеем

$$\Big|\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} u_n(y+k/N)\overline{v_n(y+k/N)}\Big| \le C_9(N + N^{-1}\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} 1).$$

Следовательно,

$$\Big|\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} \int_0^{1/N} u_n(y+k/N)\overline{v_n(y+k/N)}dy\Big| \le C_9(1 + N^{-2}\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} 1),$$

где $\mu \ge N^2$ и $k = 0, 1, \ldots, N-2$. Отсюда, учитывая, что

$$\int_0^{1/N} u_n(y+k/N)\overline{v_n(y+k/N)}dy = \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t)\overline{v_n(t)}dt,$$

получим оценку

$$\Big|\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t)\overline{v_n(t)}dt\Big| \le C_9(1 + N^{-2}\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1} 1). \tag{3.7}$$

Согласно (2.3), (3.4) имеем $\int\limits_{1-1/N}^{1} u_n(t)\overline{v_n(t)}dt = N^{-1}O(1)$. Поэтому

$$1 = (u_n, v_n) = \int_0^1 u_n(t)\overline{v_n(t)}dt = \sum_{k=0}^{N-2}\int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t)\overline{v_n(t)}dt + \int_{1-1/N}^{1} u_n(t)\overline{v_n(t)}dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-2}\int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t)\overline{v_n(t)}dt + N^{-1}O(1).$$

Отсюда вытекает, что

$$K(\mu)=\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1}1=\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1}\int\limits_{k/N}^{(k+1)/N}u_n(t)\overline{v_n(t)}dt+N^{-1}K(\mu)O(1).$$

Используем последнее равенство и (3.7) для оценки $K(\mu)$:

$$K(\mu)\le\sum_{k=0}^{N-2}\Big|\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1}\int\limits_{k/N}^{(k+1)/N}u_n(t)\overline{v_n(t)}dt\Big|+C_{10}N^{-1}K(\mu)\le$$

$$\le C_9\sum_{k=0}^{N-2}(1+N^{-2}K(\mu))+C_{10}N^{-1}K(\mu)\le C_9N+C_{11}N^{-1}K(\mu).$$

Таким образом, доказали, что при всех $\mu\ge N^2$ имеет место оценка $(1-C_{11}N^{-1})K(\mu)\le C_9N$. Положим $N=N_1=\max\{2(1+[C_{11}]),2+[\sqrt{|\mu_{n_1}|}]\}$, где квадратная скобка означает целую часть числа. Отсюда и из последнего неравенства следует, что при $\mu\ge\mu_0=N_1^2$ справедливо неравенство $K(\mu)\le 2C_9N_1$, т.е.

$$\sum_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1}1\le 2C_9N_1=C_{12}. \tag{3.8}$$

Поскольку последовательность $\{|\mu_n|\}$ не имеет конечных точек сгущения, то $\sum\limits_{|\mu_n|\le\mu_0+1}1\le C_{13}$. Следовательно, при $0\le\mu\le\mu_0$ $\sum\limits_{\mu\le|\mu_n|\le\mu+1}1\le\sum\limits_{|\mu_n|\le\mu_0+1}1\le C_{13}$. Из последнего неравенства и (3.8) следует справедливость (1.3), причем $C_1=C_{12}+C_{13}$. Основная теорема доказана.

В заключение отметим, что аналогичные результаты для почти нормированных систем корневых функций получены в работе [12].

Литература

1. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №5. С. 1048 — 1053.
2. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, №12. С. 2059 — 2071.
3. *Керимов Н.Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов: Дис. ...канд.физ.-мат.наук. М., 1985.
4. *Керимов Н.Б.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, №6. С. 943 — 953.
5. *Ломов И.С.* // Вестн. Моск.ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1992. №5. С. 42 — 52.
6. *Будаев В.Д.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, №1. С. 20 — 29.
7. *Качмаж Г., Штейнгауз С.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
8. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т.18, №10. С. 1684 — 1694.
9. *Тихомиров В.В.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №4. С. 807 — 810.
10. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков, 1977.
11. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
12. *Крицков Л.В.* // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, №6. С. 1306 — 1309.

Бакинский государственный университет
им. М.Э. Расул-заде

Поступила в редакцию
19 сентября 1995 г.