Н. Б. Керимов, Х. Р. Мамедов, О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 558–563

DOI: 10.4213/mzm1430

Математические заметки

том 64 выпуск 4 октябрь 1998

УДК 517.984

О БАЗИСНОСТИ РИССА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ РЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Н. Б. Керимов, Х. Р. Мамедов

Рассматривается дифференциальный оператор $ly = y'' + q(x)y$ с периодическими (антипериодическими) краевыми условиями, являющимися не усиленно регулярными. Предполагается, что $q(x)$ – комплекснозначная функция из класса $C^{(4)}[0,1]$ и $q(0) \neq q(1)$. Доказывается, что система корневых функций этого оператора образует базис Рисса пространства $L_2(0,1)$.

Библиография: 7 названий.

Известно [1]–[3], что система корневых функций обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса в L_2. В работе [2] приведен пример дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями (но не усиленно регулярными), корневые функции которого не образуют базис. В работах [4], [5] доказано, что система корневых функций дифференциального оператора с не усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса со скобками.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$ly = y'' + q(x)y \tag{1}$$

либо с периодическими краевыми условиями

$$y(1) = y(0), \quad y'(1) = y'(0), \tag{2}$$

либо с антипериодическими краевыми условиями

$$y(1) = -y(0), \quad y'(1) = -y'(0). \tag{3}$$

А. А. Шкаликов высказал гипотезу, что корневые функции задачи (1), (2) или (1), (3) образуют обычный базис Рисса, а не базис Рисса со скобками, несмотря на то, что эти задачи только регулярны, а не усиленно регулярны.

В настоящей работе мы покажем, что для этих задач свойства базисности в некоторых случаях определяются значениями потенциала в концевых точках отрезка.

Справедлива

Теорема. *Пусть $q(x)$ – комплекснозначная функция из класса $C^{(4)}[0,1]$ и $q(1) - q(0) \neq 0$. Тогда корневые функции краевой задачи* (1), (2), *а также краевой задачи* (1), (3) *образуют базис Рисса пространства $L_2[0,1]$.*

Лемма. *Пусть $q(x)$ – комплекснозначная функция из класса $C^{(4)}[0,1]$,*

$$q(1) - q(0) \neq 0, \qquad \int_0^1 q(x)\,dx = 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *все собственные значения краевой задачи* (1), (2), *начиная с некоторого, простые и образуют две бесконечные последовательности $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$, $k = N, N+1, \dots$, где N – некоторое натуральное число и*

$$\begin{aligned} \lambda_{k,1} &= -(2k\pi)^2 + \frac{q(1)-q(0)}{4k\pi} + O\biggl(\frac{1}{k^2}\biggr), \\ \lambda_{k,2} &= -(2k\pi)^2 - \frac{q(1)-q(0)}{4k\pi} + O\biggl(\frac{1}{k^2}\biggr), \end{aligned} \tag{4}$$

соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_{k,1}(x) = \sin 2k\pi x - \cos 2k\pi x + O\biggl(\frac{1}{k}\biggr), \tag{5}$$

$$y_{k,2}(x) = \sin 2k\pi x + \cos 2k\pi x + O\biggl(\frac{1}{k}\biggr); \tag{6}$$

б) *все собственные значения краевой задачи* (1), (3), *начиная с некоторого, простые и образуют две бесконечные последовательности $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$, $k = N, N+1, \dots$, где N – некоторое натуральное число и*

$$\begin{aligned} \lambda_{k,1} &= -((2k+1)\pi)^2 - \frac{q(1)-q(0)}{2(2k+1)\pi} + O\biggl(\frac{1}{k^2}\biggr), \\ \lambda_{k,2} &= -((2k+1)\pi)^2 + \frac{q(1)-q(0)}{2(2k+1)\pi} + O\biggl(\frac{1}{k^2}\biggr), \end{aligned}$$

соответствующие собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} y_{k,1}(x) &= \sin(2k+1)\pi x - \cos(2k+1)\pi x + O\biggl(\frac{1}{k}\biggr), \\ y_{k,2}(x) &= \sin(2k+1)\pi x + \cos(2k+1)\pi x + O\biggl(\frac{1}{k}\biggr). \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Утверждения а) и б) доказываются одинаково, поэтому проведем рассуждения для а).

Рассмотрим уравнение $y'' + q(x)y = \lambda y$ или

$$y'' + q(x)y + \mu^2 y = 0, \tag{8}$$

где $\mu = \sqrt{-\lambda}$ и $\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ при $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Известно [6, с. 74], что собственные значения краевой задачи (1), (2) асимптотически расположены парами, т.е.

$$\lambda_{k,1} = \lambda_{k,2} + O(k^{1/2}) = -(2k\pi)^2\left(1 + \frac{\xi_0}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right), \qquad k = N, N+1, \dots .$$

Из последнего равенства следует, что

$$\left.\begin{aligned} \mu_{k,1} &= \sqrt{-\lambda_{k,1}} = 2k\pi\left(1 + \frac{\xi_0}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right), \\ \mu_{k,2} &= \sqrt{-\lambda_{k,2}} = 2k\pi\left(1 + \frac{\xi_0}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right), \end{aligned}\right\} \quad k = N, N+1, \dots .$$

Следовательно, $|\operatorname{Im}\mu_{k,1}| \leqslant c_0$, $|\operatorname{Im}\mu_{k,2}| \leqslant c_0$, где c_0 – некоторое положительное число.

Таким образом, при всех $k = N, N+1, \dots$ справедливо

$$\mu_{k,1}, \mu_{k,2} \in Q = \{\mu : \operatorname{Re}\mu \geqslant 0,\ |\operatorname{Im}\mu| \leqslant c_0\}.$$

Нетрудно проверить, что $Q \in S_0 - ic_0 \equiv T$, где $S_0 = \{\mu : 0 \leqslant \arg\mu \leqslant \pi/2\}$.

Хорошо известно [6, с. 64], что в области T комплексной плоскости μ уравнение (8) имеет два линейно независимых решения $\varphi_1(x,\mu), \varphi_2(x,\mu)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \varphi_j(x,\mu) &= e^{\mu\omega_j x}\left(\sum_{m=0}^{4} \frac{u_m(x)}{(2\omega_j\mu)^m} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right)\right), \\ \varphi_j'(x,\mu) &= \mu\omega_j e^{\mu\omega_j x}\left(u_0(x) + \sum_{m=1}^{4} \frac{u_m(x) + 2u_{m-1}'(x)}{(2\omega_j\mu)^m} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right)\right), \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2,$$

где

$$\omega_1 = -\omega_2 = i, \qquad u_0(x) = 1, \qquad u_m(x) = -\int_0^x l\big(u_{m-1}(\xi)\big)\,d\xi, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_j(0,\mu) &= 1 + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right), \\ \varphi_j(1,\mu) &= e^{\mu\omega_j}\left(1 + \frac{q(1) - q(0)}{(2\mu\omega_j)^2} + \frac{1}{(2\mu\omega_j)^3}\left(q'(0) - q'(1) - \int_0^1 q^2(t)\,dt\right)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{q''(1) - q''(0) + \frac{5}{2}q^2(1) - \frac{3}{2}q^2(0) - q(0)q(1)}{(2\mu\omega_j)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right)\right), \\ \varphi_j'(0,\mu) &= \mu\omega_j\left(1 - \frac{2q(0)}{(2\mu\omega_j)^2} + \frac{2q'(0)}{(2\mu\omega_j)^3} - \frac{2q''(0) + 2q^2(0)}{(2\mu\omega_j)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right)\right), \\ \varphi_j'(1,\mu) &= \mu\omega_j e^{\mu\omega_j}\left(1 - \frac{q(0) + q(1)}{(2\mu\omega_j)^2} + \frac{1}{(2\mu\omega_j)^3}\left(q'(1) + q'(0) - \int_0^1 q^2(t)\,dt\right)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{q''(1) + q''(0) + \frac{3}{2}q^2(1) + \frac{3}{2}q^2(0) - q(0)q(1)}{(2\mu\omega_j)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right)\right). \end{aligned}$$

Подставим все эти выражения в характеристический определитель

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_1(\varphi_2) \\ U_2(\varphi_1) & U_2(\varphi_2) \end{vmatrix}, \qquad \text{где } \; U_1(y) = y(1) - y(0), \quad U_2(y) = y'(1) - y'(0).$$

С помощью элементарных преобразований находим, что при достаточно больших по абсолютной величине значениях $\mu \in T$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}(i\mu)^{-1}e^{i\mu}\Delta(\mu) = e^{2i\mu}\biggl(1 &- \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} - \frac{1}{(2i\mu)^3}\int_0^1 q^2(t)\,dt \\ &- \frac{2q''(0) - \frac{1}{2}q^2(1) + \frac{3}{2}q^2(0) + q(0)q(1)}{(2i\mu)^4} + O\biggl(\frac{1}{\mu^5}\biggr)\biggr) \\ &- 2e^{i\mu}\biggl(1 - \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} - \frac{2q''(0) + 2q^2(0)}{(2i\mu)^4} + O\biggl(\frac{1}{\mu^5}\biggr)\biggr) \\ &+ \biggl(1 - \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} + \frac{1}{(2i\mu)^3}\int_0^1 q^2(t)\,dt \\ &- \frac{2q''(0) - \frac{1}{2}q^2(1) + \frac{3}{2}q^2(0) + q(0)q(1)}{(2i\mu)^4} + O\biggl(\frac{1}{\mu^5}\biggr)\biggr). \end{aligned} \tag{9}$$

Множитель при $e^{2i\mu}$ в равенстве (9) обозначим через $b(\mu)$. Используя разложение

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + O(x^3), \qquad x \to 0,$$

нетрудно убедиться, что при больших по абсолютной величине значениях $\mu \in T$ имеет место

$$\begin{aligned} b^{-1}(\mu) = 1 &+ \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} + \frac{1}{(2i\mu)^3}\int_0^1 q^2(t)\,dt \\ &+ \frac{2q''(0) - \frac{1}{2}q^2(1) + \frac{11}{2}q^2(0) + q(0)q(1)}{(2i\mu)^4} + O\biggl(\frac{1}{\mu^5}\biggr). \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, при больших по абсолютной величине значениях $\mu \in T$ уравнение $\Delta(\mu) = 0$ равносильно уравнению

$$(i\mu)^{-1}b^{-1}(\mu)\Delta(\mu)e^{i\mu} = 0. \tag{11}$$

В силу (9), (10) уравнение (11) легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\biggl(e^{i\mu} - \biggl(1 + \frac{1}{(2i\mu)^3}\int_0^1 q^2(t)\,dt - \frac{(q(1)-q(0))^2}{2(2i\mu)^4} + O\biggl(\frac{1}{\mu^5}\biggr)\biggr)\biggr)^2 \\ = -\frac{(q(1)-q(0))^2}{(2i\mu)^4} + O\biggl(\frac{1}{\mu^5}\biggr). \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку $q(1) - q(0) \neq 0$, уравнение (12) распадается на два:

$$e^{i\mu} - 1 = \frac{i(q(1)-q(0))}{(2i\mu)^2} + O\biggl(\frac{1}{\mu^3}\biggr), \tag{13}$$

$$e^{i\mu} - 1 = -\frac{i(q(1)-q(0))}{(2i\mu)^2} + O\biggl(\frac{1}{\mu^3}\biggr). \tag{14}$$

Согласно теореме Руше получим асимптотические выражения для корней $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$, $k = N, N+1, \ldots$ (N – некоторое натуральное число), уравнений (13) и (14) соответственно:

$$\mu_{k,1} = 2k\pi - \frac{q(1)-q(0)}{(4k\pi)^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \tag{15}$$

$$\mu_{k,2} = 2k\pi + \frac{q(1)-q(0)}{(4k\pi)^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \tag{16}$$

Отметим, что $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$ – простые корни уравнений (13) и (14) соответственно. Из равенств (15), (16) и соотношений $\lambda_{k,1} = -\mu_{k,1}^2$, $\lambda_{k,2} = -\mu_{k,2}^2$ легко получаются формулы (4) и простота этих собственных значений.

Вычислим $U_1(\varphi_1(x_1, \mu_{k,1}))$ и $U_1(\varphi_2(x_1, \mu_{k,1}))$. Поскольку

$$e^{i\mu_{k,1}} = 1 + \frac{i(q(1)-q(0))}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right),$$

имеем

$$\begin{aligned} U_1(\varphi_1(x, \mu_{k,1})) &= \varphi_1(1, \mu_{k,1}) - \varphi_1(0, \mu_{k,1}) \\ &= e^{i\mu_{k,1}}\left(1 + \frac{q(1)-q(0)}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right)\right) - 1 - O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^5}\right) \\ &= \frac{(1+i)(q(1)-q(0))}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично получим

$$U_1(\varphi_2(x, \mu_{k,1})) = \frac{(1-i)(q(1)-q(0))}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right). \tag{18}$$

Поскольку $U_1(\varphi_j(x, \mu_{k,1})) \neq 0$, $j = 1, 2$, и $q(1) - q(0) \neq 0$, собственную функцию $y_{k,1}(x)$, соответствующую собственному значению $\lambda_{k,1}$, будем искать в виде

$$y_{k,1} = \frac{(2i\mu_{k,1})^2}{2i(q(1)-q(0))} \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \mu_{k,1}) & \varphi_2(x, \mu_{k,1}) \\ U_1(\varphi_1(x, \mu_{k,1})) & U_1(\varphi_2(x, \mu_{k,1})) \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Поскольку

$$\varphi_j(x, \mu_{k,1}) = e^{\mu_{k,1}\omega_j x} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}}\right)$$

(так как $|\operatorname{Im} \mu_{k,1}| \leqslant c_0$), из формул (17)–(19) имеем

$$y_{k,1} = \sin \mu_{k,1}x - \cos \mu_{k,1}x + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}}\right).$$

Следовательно, в силу (15) для собственной функции $y_{k,1}(x)$ имеет место асимптотическая формула (5).

Повторяя предыдущие рассуждения для собственной функции $y_{k,2}(x)$, соответствующей собственному значению $\lambda_{k,2}$, получим формулу (6). Доказательство леммы завершено.

Доказательство теоремы. Не нарушая общности, считаем, что

$$\int_0^1 q(x)\,dx = 0.$$

Система корневых функций краевой задачи (1), (2) минимальна в $L_2(0,1)$, поскольку обладает биортогонально сопряженной системой, состоящей из корневых функций сопряженного оператора

$$l^*v = v'' + \overline{q(x)}v, \qquad v(0) = v(1), \quad v'(0) = v'(1).$$

Кроме того, из асимптотических формул (5), (6) следует, что система корневых функций задачи (1), (2) квадратически близка к ортонормированному базису

$$\sin 2k\pi x - \cos 2k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots, \qquad \sin 2k\pi x + \cos 2k\pi x, \quad k = 0, 1, \dots,$$

пространства $L_2(0,1)$. Следовательно, в силу известной теоремы из [7, с. 440] система корневых функций краевой задачи (1), (2) образует базис Рисса пространства $L_2(0,1)$.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для краевой задачи (1), (3). При этом используются асимптотические формулы (7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. №5. С. 981–984.
[2] Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. 1964. №2. С. 82–93.
[3] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 3. М.: Мир, 1974.
[4] Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // УМН. 1979. Т. 34. №5. С. 235–236.
[5] Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. №6. С. 12–21.
[6] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
[7] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1958.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
29.04.96
Исправленный вариант
01.04.98