Н. Б. Керимов, Х. Р. Мамедов, Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях, *Сиб. матем. журн.*, 1999, том 40, номер 2, 325–335

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 1999. Том 40, № 2

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Н. Б. Керимов, Х. Р. Мамедов

Рассмотрим следующую краевую задачу со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях:

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1, \tag{0.1}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) + u'(0) = 0, \tag{0.2}$$

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)u(1) + u'(1) = 0. \tag{0.3}$$

Здесь λ — спектральный параметр, $q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на промежутке $[0,1]$, α_i, β_i — действительные постоянные. Настоящая работа посвящена изучению свойств собственных значений и собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3). Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях в различных постановках изучались во многих работах [1–12]. Близкие по постановке проблемы изучались в [10–12]. Однако имеется существенное отличие задачи (0.1)–(0.3) от задач, изученных в [10–12]. А именно, в [10–12] предполагалось, что $\alpha_1, \beta_1 = 0$, тогда задача сводится к линейному оператору. В нашем случае в краевом условии присутствует как λ, так и λ^2, а потому операторную трактовку такой задачи естественно реализовывать в терминах квадратичных операторных пучков (например, см. работу А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликова [13]).

Основным результатом этой работы является теорема 2.1 о числе нулей собственных функций при естественной их нумерации и теорема 4.1 об асимптотических формулах собственных значений и собственных функций. На нетривиальность этой задачи в случае вхождения λ и λ^2 в краевые условия обратил наше внимание А. А. Шкаликов.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$\alpha_0 < 0, \ \alpha_2 > 0, \ \beta_0 > 0, \ \beta_2 < 0, \ \ |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0. \tag{0.4}$$

§ 1. Некоторые свойства собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3)

Лемма 1.1. *Собственные значения краевой задачи* (0.1)–(0.3) *вещественны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3) и $u(x,\lambda)$ — соответствующая собственная функция. Умножая обе части равенства (0.1) на функцию $\overline{u(x,\lambda)}$, проинтегрируем полученное тождество по x от 0 до 1:

$$-\int_0^1 u''(x,\lambda)\overline{u(x,\lambda)}\,dx + \int_0^1 q(x)|u(x,\lambda)|^2\,dx = \lambda^2 \int_0^1 |u(x,\lambda)|^2\,dx. \tag{1.1}$$

Используя формулу интегрирования по частям и краевые условия (0.2), (0.3), получим

$$\int_0^1 u''(x,\lambda)\overline{u(x,\lambda)}\,dx = (\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)|u(0,\lambda)|^2 - (\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2)|u(1,\lambda)|^2 - \int_0^1 |u'(x,\lambda)|^2\,dx.$$

Отсюда и из (1.1) следует, что

$$A(\lambda)\lambda^2 + B(\lambda)\lambda + C(\lambda) = 0,$$

где

$$A(\lambda) = \int_0^1 |u(x,\lambda)|^2 dx + \alpha_2|u(0,\lambda)|^2 - \beta_2|u(1,\lambda)|^2,$$

$$B(\lambda) = \alpha_1|u(0,\lambda)|^2 - \beta_1|u(1,\lambda)|^2,$$

$$C(\lambda) = \alpha_0|u(0,\lambda)|^2 - \beta_0|u(1,\lambda)|^2 - \int_0^1 q(x)|u(x,\lambda)|^2\,dx - \int_0^1 |u'(x,\lambda)|^2\,dx.$$

Таким образом, собственное значение λ является корнем квадратного уравнения

$$A(\lambda)z^2 + B(\lambda)z + C(\lambda) = 0. \tag{1.2}$$

В силу (0.4) $A(\lambda) > 0$, $C(\lambda) < 0$, и поэтому $B^2(\lambda) - 4A(\lambda)C(\lambda) > 0$. Следовательно, уравнение (1.2) имеет только вещественные корни. Лемма 1.1 доказана.

Аналогично теореме 1.1 из [14, с. 14] можно доказать, что существует единственное решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0,\lambda) = 1, \quad \psi'(0,\lambda) = -\alpha_0 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2, \tag{1.3}$$

причем при каждом фиксированном $x \in [0,1]$, функция $\psi(x,\lambda)$ является целой функцией аргумента λ.

Лемма 1.2. *Собственные значения краевой задачи* (0.1)–(0.3) *образует не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки. Все собственные значения краевой задачи* (0.1)–(0.3) *простые.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1.2 из [10] устанавливается первая часть леммы. Для доказательства второй части достаточно будет показать, что уравнение

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)\psi(1,\lambda) + \psi'(1,\lambda) = 0 \tag{1.4}$$

имеет только простые корни. Действительно, если $\lambda = \lambda^*$ является кратным корнем уравнения (1.4), то имеют место равенства

$$(\beta_0 + \beta_1\lambda^* + \beta_2{\lambda^*}^2)\psi(1,\lambda^*) + \psi'(1,\lambda^*) = 0, \tag{1.5}$$

$$(\beta_1 + 2\beta_2\lambda^*)\psi(1,\lambda^*) + (\beta_0 + \beta_1\lambda^* + \beta_2{\lambda^*}^2)\frac{\partial\psi(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} + \frac{\partial\psi'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} = 0. \tag{1.6}$$

Так как $\psi(x, \lambda)$ является решением уравнения (0.1), имеем

$$\frac{d}{dx}[\psi(x,\lambda)\psi'(x,\mu) - \psi(x,\mu)\psi'(x,\lambda)] = (\lambda^2 - \mu^2)\psi(x,\lambda)\psi(x,\mu).$$

Отсюда после интегрирования с учетом (1.3) получим

$$\frac{\psi(1,\lambda)\psi'(1,\mu) - \psi(1,\mu)\psi'(1,\lambda)}{\lambda - \mu} - \alpha_1 = (\lambda + \mu)\left\{\alpha_2 + \int\limits_0^1 \psi(x,\lambda)\psi(x,\mu)\,dx\right\},$$

где $\lambda \neq \mu$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $\mu \to \lambda$ и полагая $\lambda = \lambda^*$, имеем

$$\psi'(1,\lambda^*)\frac{\partial\psi(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} - \psi(1,\lambda^*)\frac{\partial\psi'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} - \alpha_1 = 2\lambda^*\left\{\alpha_2 + \int\limits_0^1 \psi^2(x,\lambda^*)\,dx\right\}. \quad (1.7)$$

Из (1.5) и (1.6) соответственно следуют равенства

$$\psi'(1,\lambda^*) = -(\beta_0 + \beta_1\lambda^* + \beta_2{\lambda^*}^2)\psi(1,\lambda^*),$$

$$\frac{\partial\psi'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} = -(\beta_1 + 2\beta_2\lambda^*)\psi(1,\lambda^*) - (\beta_0 + \beta_1\lambda^* + \beta_2{\lambda^*}^2)\frac{\partial\psi(1,\lambda^*)}{\partial\lambda}.$$

Используя эти равенства в (1.7), получим

$$\beta_1\psi^2(1,\lambda^*) - \alpha_1 = 2\lambda^*\left[\int\limits_0^1 \psi^2(x,\lambda^*)\,dx + \alpha_2 - \beta_2\psi^2(1,\lambda^*)\right]. \quad (1.8)$$

Поскольку λ^* — собственное значение, то, как показано в доказательстве леммы 1.1,

$$A(\lambda^*){\lambda^*}^2 + B(\lambda^*)\lambda^* + C(\lambda^*) = 0, \quad (1.9)$$

где

$$A(\lambda^*) = \int\limits_0^1 \psi^2(x,\lambda^*)\,dx + \alpha_2 - \beta_2\psi^2(1,\lambda^*), \quad (1.10)$$

$$B(\lambda^*) = \alpha_1 - \beta_1\psi^2(1,\lambda^*), \quad (1.11)$$

$$C(\lambda^*) = \alpha_0 - \beta_0\psi^2(1,\lambda^*) - \int\limits_0^1 q(x)\psi^2(x,\lambda^*)\,dx - \int\limits_0^1 {\psi'}^2(x,\lambda^*)\,dx.$$

В силу (1.8), (1.10) и (1.11) имеем $\lambda^* = -\frac{B(\lambda^*)}{2A(\lambda^*)}$ (поскольку $A(\lambda^*) > 0$). Отсюда и из (1.9) получим $B^2(\lambda^*) = 4A(\lambda^*)C(\lambda^*)$. Последнее противоречит неравенствам $A(\lambda^*) > 0$, $C(\lambda^*) < 0$. Лемма 1.2 доказана.

§ 2. Осцилляционные свойства собственных функций задачи (0.1)–(0.3)

Лемма 2.1. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения $u'' + g(x)u = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 1$, $u'(0) = -\alpha_0 - \alpha_1\lambda' - \alpha_2{\lambda'}^2$, а $v(x)$ — решение уравнения $v'' + h(x)v = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $v(0) = 1$, $v'(0) = -\alpha_0 - \alpha_1\lambda'' - \alpha_2{\lambda''}^2$. Кроме того, пусть $g(x) < h(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ и либо $\lambda'' > \lambda' \geqslant \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$, либо $\lambda'' < \lambda' \leqslant \min\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$. Тогда если $u(x)$ в интервале $0 < x \leqslant 1$ имеет m нулей, то $v(x)$ в том же интервале имеет не меньше m нулей и k-й нуль $v(x)$ меньше k-го нуля $u(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим только случай $\lambda'' > \lambda' \geqslant \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$, случай $\lambda'' < \lambda' \leqslant \min\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$ исследуется аналогично.

Обозначим через x_1 нуль функции $u(x)$ ближайший к точке 0. По теореме Штурма [14, с. 28] достаточно доказать, что $v(x)$ имеет по крайней мере один нуль внутри интервала $[0, x_1]$. Предположим противное. Очевидно, что при $0 \leqslant x < x_1$ справедливы неравенства $u(x) > 0$, $v(x) > 0$. Так как $u(x_1) = 0$, то в окрестности точки x_1 функция $u(x)$ убывает. Следовательно, $u'(x_1) \leqslant 0$. Интегрируя тождество $\frac{d}{dx}(u'v - uv') = (h(x) - g(x))u(x)v(x)$ в пределах от 0 до x_1, получим

$$u'(x_1)v(x_1) - \alpha_1(\lambda'' - \lambda') - \alpha_2(\lambda''^2 - \lambda'^2) = \int_0^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x)\, dx. \quad (2.1)$$

Так как в $h(x) > g(x)$, $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ в промежутке $(0, x_1)$, то в последнем равенстве правая часть положительна. Кроме того, $u'(x_1)v(x_1) \leqslant 0$, и поскольку $\alpha_2 > 0$, $\lambda'' > \lambda' \geqslant \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\}$, имеем

$$\alpha_1(\lambda'' - \lambda') + \alpha_2(\lambda''^2 - \lambda'^2) = (\lambda'' - \lambda')\{\alpha_1 + \alpha_2(\lambda'' + \lambda')\}$$
$$> (\lambda'' - \lambda')\left[\alpha_1 + 2\alpha_2 \max\left\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}\right] \geqslant 0.$$

Таким образом, левая часть равенства (2.1) отрицательна. Приходим к противоречию. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Число* $\lambda = 0$ *не является собственным значением краевой задачи* (0.1)–(0.3).

Доказательство. Через $\psi(x)$ обозначим решение начальной задачи $-\psi'' + q(x)\psi = 0$, $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = -\alpha_0$. Докажем, что $\beta_0\psi(1) + \psi'(1) \neq 0$. Поскольку $\beta_0 > 0$, достаточно доказать, что $\psi(1)\psi'(1) > 0$.

Интегрируя тождество $-\psi''\psi + q(x)\psi^2 = 0$ в пределах от 0 до 1, получим

$$\psi(1)\psi'(1) = -\alpha_0 + \int_0^1 \psi'(x)^2\, dx + \int_0^1 q(x)\psi^2(x)\, dx.$$

Учитывая условия $\alpha_0 < 0$, $q(x) \geqslant 0$, имеем $\psi(1)\psi'(1) > 0$. Лемма 2.2. доказана.

Пусть $\psi(x, \lambda)$ — решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.3). Рассмотрим уравнение $\psi(x, \lambda) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Из следующей леммы следует, что корни этого уравнения суть непрерывные функции от λ.

Лемма 2.3 [14, с. 30]. *Если* x_0 $(0 < x_0 < 1)$ *— нуль функции* $\psi(x, \lambda_0)$, *то любому достаточно малому числу* $\varepsilon > 0$ *соответствует такое число* $\delta > 0$, *что при* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ *функция* $\psi(x, \lambda)$ *имеет в точности один нуль в интервале* $|x - x_0| < \varepsilon$.

Из этой леммы вытекает

Следствие 2.1 [14, с. 31]. *При изменении* λ *решение* $\psi(x, \lambda)$ *только тогда может потерять нуль или приобрести новый, если он войдет внутрь интервала или выйдет оттуда через краевые точки* 0 *и* 1.

Следующая осцилляционная теорема доказывает существование счетного множества собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3).

Теорема 2.1. *Существует неограниченно убывающая последовательность отрицательных собственных значений* $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ *и неограниченно возрастающая последовательность положительных собственных значений* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *краевой задачи* (0.1)–(0.3):

$$\cdots < \lambda_{-n} < \lambda_{-n+1} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots.$$

Кроме того, существуют такие числа $n_*, n^* \in \mathbb{N}$ *и* $k_*, k^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *что собственные функции, соответствующие собственным значениям* λ_{-n} $(n \geqslant n_*)$ *и* λ_n $(n \geqslant n^*)$, *имеют соответственно* $n + k_* - n_*$ *и* $n + k^* - n^*$ *простых нулей в интервале* $(0, 1)$.

Доказательство. Будем доказывать только существование и свойства последовательности положительных собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3). Часть теоремы, относящаяся к отрицательным собственным значениям, доказывается аналогично.

Пусть $\lambda \geqslant \lambda^* \equiv \max\{0; -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}; -\frac{\beta_1}{2\beta_2}\}$ и $\psi(x, \lambda)$ есть решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условием (1.3). В силу леммы 2.1 при возрастании λ число нулей функции $\psi(x, \lambda)$ не убывает.

Пусть $0 \leqslant q(x) < c$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Решением уравнения

$$y'' + (\lambda^2 - c)y = 0 \tag{2.2}$$

удовлетворяющим начальным условиям (1.3), является функция

$$y = \cos(x\sqrt{\lambda^2 - c}) - \frac{\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - c}} \sin(x\sqrt{\lambda^2 - c}). \tag{2.3}$$

При λ положительном и неограниченно возрастающем число нулей функции (2.3), расположенных в интервале $(0, 1)$, неограниченно растет. Сравним уравнение (0.1) с уравнением (2.2). Из леммы 2.1 следует, что при λ положительном и неограниченно возрастающем число нулей функции $\psi(x, \lambda)$, расположенных в интервале $(0, 1)$, неограниченно растет.

Рассмотрим уравнение $\psi(x, \lambda) = 0$ при $\lambda \geqslant \lambda^*$. Предположим, что функция $\psi(x, \lambda^*)$ в интервале $(0, 1)$ имеет k^* нулей. На основании леммы 2.3 корни уравнения $\psi(x, \lambda) = 0$ непрерывно зависят от λ. С другой стороны, в силу леммы 2.1 при возрастании λ каждый нуль функции $\psi(x, \lambda)$ передвигается влево, а через точку нуль выйти не может, так как число нулей не убывает. В силу следствия 2.1 нули входят через точку 1. Пусть $\tilde{\lambda}_0$ — первое значение параметра $\lambda \geqslant \lambda^*$, для которого $\psi(1, \lambda) = 0$. Такое значение, очевидно, найдется. Пусть $\tilde{\lambda}_1$ $(\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_0)$ — второе значение параметра λ, для которого $\psi(1, \lambda) = 0$, и т. д. Очевидно, что функция $\psi(x, \tilde{\lambda}_0)$ имеет в интервале $(0, 1)$ ровно k^* нулей. Последовательность $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots$ обладает тем свойством, что функция $\psi(x, \tilde{\lambda}_k)$ имеет в интервале $(0, 1)$ ровно $k + k^*$ нулей, причем $\psi(1, \tilde{\lambda}_k) = 0$. Нетрудно заметить, что числа $\tilde{\lambda}_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ не являются собственными значениями краевой задачи (0.1)–(0.3).

Функция $\frac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ в интервале $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ строго убывает. Доказательство этого утверждения дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 3.3 из [14, с. 31]. При этом вместо теоремы 3.2 из [14, с. 20] используется лемма 2.1 настоящей работы. Так как $\psi(1, \tilde{\lambda}_k) = \psi(1, \tilde{\lambda}_{k+1}) = 0$, в интервале $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ функция $\frac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ должна строго убывать от $+\infty$ до $-\infty$.

Пусть $P(\lambda) = -\beta_0 - \beta_1\lambda - \beta_2\lambda^2$. Эта функция строго возрастает при $\lambda \geqslant -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$ и тем более при $\lambda \geqslant \tilde{\lambda}_0$ (поскольку $\tilde{\lambda}_0 \geqslant \lambda^* \geqslant -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$).

Пусть $n^* - 1$ — число собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3), расположенных на отрезке $[0, \tilde{\lambda}_0]$. Поскольку функция $\frac{\psi'(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ в интервале $(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$, найдется единственное значение $\lambda_{n^*+k} \in (\tilde{\lambda}_k, \tilde{\lambda}_{k+1})$, для которого $\frac{\psi'(1,\lambda_{n^*+k})}{\psi(1,\lambda_{n^*+k})} = P(\lambda_{n^*+k})$, т. е. выполняется условие (0.3). Следовательно, λ_{n^*+k} есть собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3), а соответствующая собственная функция $\psi(x, \lambda_{n^*+k})$ в интервале $(0,1)$ имеет столько же нулей, сколько и $\psi(x, \tilde{\lambda}_k)$, т. е. $k + k^*$. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Определение и свойства функции $\theta_m(x)$ $(m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $u_m(x)$ — собственная функция краевой задачи (0.1)–(0.3), соответствующая собственному значению λ_m, где $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Пусть

$$\Delta = \max\left\{\frac{|\alpha_1| + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}; \frac{|\beta_1| + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}}{2|\beta_2|}\right\} + 1. \tag{3.1}$$

Очевидно, что при $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $|\lambda| \geqslant \Delta$ справедливы неравенства

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 > 0, \quad \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 < 0. \tag{3.2}$$

Предположим, что N_0 — такое натуральное число, что

$$\lambda_m^2 \geqslant \Delta_0, \quad \text{где} \quad \Delta_0 = \max\{\Delta, 2C_0 + 1\} \quad \text{и} \quad C_0 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} q(x),$$

при $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|m| \geqslant N_0$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $|m| \geqslant N_0$.

Введем угловую переменную $\theta_m(x) = \operatorname{Arctg} \frac{u_m(x)}{u_m'(x)}$, или, точнее,

$$\theta_m(x) = \arg\{u_m'(x) + iu_m(x)\}. \tag{3.3}$$

Учитывая (0.2), определяем начальное значение

$$\theta_m(0) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\lambda_m + \alpha_2\lambda_m^2} + \pi. \tag{3.4}$$

Для других x функция $\theta_m(x)$ задается формулой (3.3) с точностью до произвольного слагаемого, кратного 2π, поскольку функции $u_m'(x)$ и $u_m(x)$ не могут обращаться в нуль одновременно. Это выражение, кратное 2π, надлежит зафиксировать так, чтобы функция $\theta_m(x)$ удовлетворяла условию (3.4) и была непрерывной по x. Этим функция $\theta_m(x)$ определяется единственным образом [15, с. 244].

Лемма 3.1 [11]. *Функция $\theta_m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\theta_m'(x) = \cos^2\theta_m(x) + \left(\lambda_m^2 - q(x)\right)\sin^2\theta_m(x)$$

и возрастает на отрезке $[0, 1]$.

Из (3.3) ясно, что нули функции $u_m(x)$ совпадают с точками, в которых $\theta_m(x)$ кратно π. Рассматривая функцию $u_m(x)$, когда x возрастает от 0 до 1, видим, что она имеет нуль в точке $x \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда в этой точке $\theta_m(x)$, возрастая, проходит значение, кратное π.

Так как $0 < \theta_m(0) < \pi$, видим, что при возрастании x от 0 до 1 функция $\theta_m(x)$ последовательно принимает конечное число значений $\pi, 2\pi, \ldots$. Поскольку функция $\theta_m(x)$ не может, убывая, стремиться к углу, кратному π, то она достигает углов, кратных π, в порядке возрастания.

Нетрудно заметить, что $u_m(0) \neq 0$, $u'_m(0) \neq 0$ при $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $|m| \geqslant N_0$, и поэтому функция $\theta_m(x)$, вообще говоря, не принимает неположительных значений.

Обозначим через $x_{m,k}$ $(k = \overline{1, k_m})$ нули собственной функции $u_m(x)$ в интервале $(0,1)$: $0 < x_{m,1} < x_{m,2} < \cdots < x_{m,k_m} < 1$. Из осцилляционной теоремы 2.1 следует, что для всех достаточно больших по модулю значениях $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ справедливы равенства $k_{|m|} = |m| + k^* - n^*$ и $k_{-|m|} = |m| + k_* - n_*$.

Повторением аналогичных рассуждений при доказательстве леммы 2.1 из [11] устанавливается

Лемма 3.2. *Для собственных значений λ_m $(|m| \geqslant N_0)$ справедливы оценки*

$$C_1|m| \leqslant |\lambda_m| \leqslant C_2|m|, \tag{3.5}$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные.

Лемма 3.3 [11]. *Пусть $q(x) \in C[0,1]$ и $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_\nu < t_{\nu+1} = 1$. Тогда*

$$\int_0^1 q(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\nu-1} q(t_k)\Delta t_k = O(\omega(\delta)), \tag{3.6}$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant \nu} \Delta t_k$, $\omega(\delta) = \delta + \omega_1(\delta)$ и $\omega_1(\delta)$ — модуль непрерывности функции $q(x)$ на отрезке $[0,1]$. Кроме того, если $q(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то функция $\omega(\delta)$ в равенстве (3.6) может быть заменена функцией $\omega_1(\delta)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\theta_m(1) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\beta_0 + \beta_1\lambda_m + \beta_2\lambda_m^2} + \pi k_m.$$

§ 4. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

Всюду в этом параграфе предполагается, что $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|m| \geqslant N_0$, где N_0 — число, введенное в § 3.

Пусть $v_m(x)$ — собственная функция краевой задачи (0.1)–(0.3), имеющая $|m|$ нулей в интервале $(0,1)$. Через μ_m обозначим собственное значение, соответствующее собственной функции $v_m(x)$. Из осцилляционной теоремы 2.1 следует, что $\mu_m = \lambda_{m-k^*+n^*}$ при $m > 0$ и $\mu_m = \lambda_{m+k_*-n_*}$ при $m < 0$.

Нули функции $v_m(x)$ обозначим через $x_{m,k}$: $0 < x_{m,1} < x_{m,2} < \ldots \cdots < x_{m,|m|} < 1$.

Теорема 4.1. *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\mu_m = \pi(m - \operatorname{sgn} m) + \frac{1}{\pi m}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 q(x)\,dx + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_2}\right\} + O(m^{-1}\omega(m^{-1}), \tag{4.1}$$

$$v_m(x) = \sin \pi(|m|-1)x + O\big(\tfrac{1}{m}\big). \tag{4.2}$$

Доказательство. Введем функцию $\tilde{\theta}_m(x) = \arg(v'_m(x) + iv_m(x))$. В силу леммы 3.1 она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\tilde{\theta}'_m(x) = \cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \big(\mu_m^2 - q(x)\big)\sin^2 \tilde{\theta}_m(x) \tag{4.3}$$

и возрастает на отрезке $[0,1]$. Кроме того,

$$\tilde{\theta}_m(0) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\mu_m + \alpha_2\mu_m^2} + \pi, \tag{4.4}$$

$$\tilde{\theta}_m(1) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\beta_0 + \beta_1\mu_m + \beta_2\mu_m^2} + \pi|m|, \tag{4.5}$$

$$\tilde{\theta}_m(x_{m,k}) = \pi k \quad (1 \leqslant k \leqslant |m|). \tag{4.6}$$

Из (4.3) получаем

$$\frac{\tilde{\theta}'_m(x)}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)} = 1 - \frac{q(x)\sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства от 0 до $x_{m,1}$:

$$\int_0^{x_{m,1}} \frac{\tilde{\theta}'_m(x)\,dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)} = x_{m,1} - \int_0^{x_{m,1}} \frac{q(x)\sin^2 \tilde{\theta}_m(x)\,dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}.$$

Производя в первом интеграле замену $\tilde{\theta}_m(x) = \varphi$ и учитывая (4.6), получим

$$\int_{\tilde{\theta}_m(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = x_{m,1} - \int_0^{x_{m,1}} \frac{q(x)\sin^2 \tilde{\theta}_m(x)\,dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)}.$$

Действуя аналогичным образом, имеем

$$\int_{\pi|m|}^{\tilde{\theta}_m(1)} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = 1 - x_{m,|m|} - \int_{x_{m,|m|}}^{1} \frac{q(x)\sin^2 \tilde{\theta}_m(x)\,dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)},$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = x_{m,k+1} - x_{m,k} - \int_{x_{m,k}}^{x_{m,k+1}} \frac{q(x)\sin^2 \tilde{\theta}_m(x)\,dx}{\cos^2 \tilde{\theta}_m(x) + \mu_m^2 \sin^2 \tilde{\theta}_m(x)},$$

где $1 \leqslant k \leqslant |m|-1$. Учитывая (4.4), (4.5) и лемму 3.2, непосредственным вычислением легко убедиться в том, что

$$\int_{\tilde{\theta}_m(0)}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\alpha_2\mu_m^2} + O(m^{-3}),$$

$$\int_{\pi|m|}^{\tilde{\theta}_m(\pi)} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \mu_m^2 \sin^2 \varphi} = -\frac{1}{\beta_2\mu_m^2} + O(m^{-3}),$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \mu_m^2 \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{|\mu_m|} \quad (1 \leqslant k \leqslant |m|-1).$$

Из последних шести равенств следует, что

$$x_{m,1} - \int_0^{x_{m,1}} \frac{q(x)\sin^2\tilde\theta_m(x)\,dx}{\cos^2\tilde\theta_m(x) + \mu_m^2\sin^2\tilde\theta_m(x)} = \frac{1}{\alpha_2\mu_m^2} + O(m^{-3}), \tag{4.7}$$

$$1 - x_{m,|m|} - \int_{x_{m,|m|}}^{1} \frac{q(x)\sin^2\tilde\theta_m(x)\,dx}{\cos^2\tilde\theta_m(x) + \mu_m^2\sin^2\tilde\theta_m(x)} = -\frac{1}{\beta_2\mu_m^2} + O(m^{-3}), \tag{4.8}$$

$$x_{m,k+1} - x_{m,k} - \int_{x_{m,k}}^{x_{m,k+1}} \frac{q(x)\sin^2\tilde\theta_m(x)\,dx}{\cos^2\tilde\theta_m(x) + \mu_m^2\sin^2\tilde\theta_m(x)} = \frac{\pi}{|\mu_m|} \quad (1 \leqslant k \leqslant |m|-1). \tag{4.9}$$

Дословно повторяя рассуждения, используемые для доказательства равенств (3.7)–(3.9) в [11], из соотношений (4.7)–(4.9) получим справедливость следующих равенств:

$$x_{m,1} = \frac{1}{\alpha_2\mu_m^2} + O(m^{-3}), \tag{4.10}$$

$$1 - x_{m,|m|} = -\frac{1}{\beta_2\mu_m^2} + O(m^{-3}), \tag{4.11}$$

$$x_{m,k+1} - x_{m,k} = \frac{\pi}{|\mu_m|} + O(m^{-3}) \quad (1 \leqslant k \leqslant |m|-1), \tag{4.12}$$

$$x_{m,k+1} - x_{m,k} - \frac{\pi q(x_{m,k})}{2|\mu_m|^3} = \frac{\pi}{|\mu_m|} + O(m^{-3}\omega(m^{-1})) \quad (1 \leqslant k \leqslant |m|-1). \tag{4.13}$$

В силу (4.13) имеем

$$x_{m,|m|} - x_{m,1} - \frac{1}{2\mu_m^2}\sum_{k=1}^{|m|-1} \frac{\pi q(x_{m,k})}{|\mu_m|} = \frac{\pi(|m|-1)}{|\mu_m|} + O(m^{-2}\omega(m^{-1})). \tag{4.14}$$

Из (4.12) получаем

$$\frac{\pi}{|\mu_m|} = \Delta x_{m,k} + O(m^{-3}) \quad (1 \leqslant k \leqslant |m|-1).$$

Отсюда и из леммы 3.3 следует, что

$$\sum_{k=1}^{|m|-1} \frac{\pi q(x_{m,k})}{|\mu_m|} = \sum_{k=1}^{|m|-1} q(x_{m,k})\Delta x_{m,k} + O(m^{-2}) = \int_0^1 q(x)\,dx + O(\omega(m^{-1})).$$

В силу последнего и (4.14) имеем

$$x_{m,|m|} - x_{m,1} - \frac{1}{2\mu_m^2}\int_0^1 q(x)\,dx = \frac{\pi(|m|-1)}{|\mu_m|} + O(m^{-2}\omega(m^{-1})). \tag{4.15}$$

Суммируя (4.10), (4.11) и (4.15), получим

$$\frac{\pi(|m|-1)}{|\mu_m|} = 1 - \frac{\gamma}{\mu_m^2} + O(m^{-2}\omega(m^{-1})), \tag{4.16}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)\,dx + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_2}.$$

Из (4.16) следует справедливость следующих соотношений:

$$|\mu_m| = \pi(|m|-1)(1 + \frac{\gamma}{\mu_m^2} + O(m^{-2}\omega(m^{-1})),$$
$$\frac{1}{\mu_m^2} = \frac{1}{\pi^2(|m|-1)^2} + O(m^{-4}).$$

Следовательно,

$$|\mu_m| = \pi(|m|-1) + \frac{\gamma}{\pi(|m|-1)} + O(m^{-1}\omega(m^{-1})).$$

Отсюда в силу равенств $|\mu_m| = \mu_m \operatorname{sgn} m$ и $(|m|-1)^{-1} = |m|^{-1} + O(m^{-2})$ получаем формулу (4.1).

Собственную функцию $v_m(x)$ будем искать в виде

$$v_m(x) = \frac{\operatorname{sgn} m}{2i(\alpha_0 + \alpha_1\mu_m + \alpha_2\mu_m^2)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x,\mu_m) & \varphi_2(x,\mu_m) \\ U(\varphi_1(x,\mu_m),\mu_m) & U(\varphi_2(x,\mu_m),\mu_m) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)(1 + O(1/\lambda))$ $(j = 1,2)$, $\omega_1 = -\omega_2 = i$ (см. [16, с. 59]) и $U(y,\lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0) + y'(0)$. Отсюда с помощью равенств $\mu_m = \pi(m - \operatorname{sgn} m) + O(1/m)$, $U(\varphi_j(x,\mu_m),\mu_m) = (\alpha_0 + \alpha_1\mu_m + \alpha_2\mu_m^2)(1 + O(1/m))$ легко можно получить представление 4.2. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что формулу 4.2 можно уточнить.

Замечание 2. При конкретных значениях чисел α_j, β_j $(j = \overline{0,2})$ можно явно вычислить число нулей собственных функций задачи (0.1)–(0.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walter J.* Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition // Math. Z. 1973. Bd 133, N 4. S. 301–312.
2. *Schneider A.* A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. 1974. Bd 136, N 2. S. 163–167.
3. *Fulton C. T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1977. V. 77. P. 293–308.
4. *Hinton D. B.* An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1979. V. 30, N 2. P. 33–42.
5. *Руссаковский Е. М.* Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 4. С. 91–92.
6. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 4. С. 92–93.
7. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинаров им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190–229.
8. *Махмудов А. П.* Нелинейные возмущения регулярных спектральных задач с параметром в граничных условиях и о полноте их собственных функций // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 6. С. 1318–1323.

9. *Мелешко С. В., Покорный Ю. В.* Об одной вариационной краевой задаче // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1466–1467.
10. *Керимов Н. Б., Аллахвердиев Т. И.* Об одной краевой задаче. I // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 54–60.
11. *Керимов Н. Б., Аллахвердиев Т. И.* Об одной краевой задаче. II // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 952–960.
12. *Binding P. A., Browne P. J., Seddighi K.* Sturm — Lioville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1994. V. 37, N 1. P. 57–72.
13. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* К теории самосопряженных квадратичных пучков операторов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 6. С. 40–50,
14. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
15. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
16. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

г. Баку, г. Москва *Статья поступила 14 февраля 1997 г.*