Н. Б. Керимов, Об одной краевой задаче для системы Дирака со спектральным параметром в граничных условиях, *Дифференц. уравнения*, 2002, том 38, номер 2, 155–164

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 2, с. 155–164

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

© 2002 г. Н. Б. Керимов

Важный раздел спектральной теории линейных дифференциальных операторов составляет исследование задач со спектральным параметром в уравнениях и в граничных условиях. В [1, 2] приведена библиография работ, в которых такие задачи рассматривались в связи с конкретными физическими процессами.

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях в различных постановках изучались во многих работах [3–14]. В работах [7, 8] более детально изучены полнота и базисность собственных функций краевых задач со спектральным параметром в уравнениях и граничных условиях.

Рассмотрим следующую краевую задачу для системы Дирака с одним и тем же спектральным параметром в уравнениях и граничных условиях:

$$u' - \{\lambda + P(x)\}w = 0, \quad w' + \{\lambda + R(x)\}u = 0, \tag{0.1}$$

$$(\lambda\cos\alpha + a_0)u(0) - (\lambda\sin\alpha + b_0)w(0) = 0, \tag{0.2}$$

$$(\lambda\cos\beta + a_1)u(1) - (\lambda\sin\beta + b_1)w(1) = 0; \tag{0.3}$$

здесь $0 \le x \le 1$, λ – спектральный параметр, $P(x)$ и $R(x)$ –действительнозначные функции из класса $C[0,1]$, a_k, b_k $(k = 1, 2)$ и α, β – действительные постоянные, причем $-\pi/2 \le \alpha \le$ $\le \pi/2$ и $-\pi/2 \le \beta \le \pi/2$.

Настоящая работа посвящена изучению свойств собственных значений и собственных вектор-функций краевой задачи (0.1)–(0.3). Основным результатом этой работы является осцилляционная теорема 3.1 и теорема 5.1 об асимптотических формулах для собственных значений.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия

$$\sigma_0 = a_0\sin\alpha - b_0\cos\alpha > 0, \quad \sigma_1 = a_1\sin\beta - b_1\cos\beta < 0. \tag{0.4}$$

Заметим, что краевые условия $(\lambda\alpha_{11} + \beta_{11})u(0) - (\lambda\alpha_{12} + \beta_{12})w(0) = 0$, $(\lambda\alpha_{21} + \beta_{21})u(1) -$ $- (\lambda\alpha_{22} + \beta_{22})w(1) = 0$ при $\alpha_{12}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{12} > 0$, $\alpha_{22}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{22} < 0$ легко приводятся к (0.2), (0.3), при этом имеют место условия (0.4).

1. Некоторые свойства собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3).

Лемма 1.1. *Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) вещественны.*

Доказательство. Пусть λ_0 – невещественное собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3), а $(u(x), w(x))$ – соответствующая собственная вектор-функция. В силу (0.1) при $0 \le x \le 1$ имеем

$$(d/dx)\{u(x)\overline{w(x)} - \overline{u(x)}w(x)\} = (\lambda_0 - \overline{\lambda_0})\{|u(x)|^2 + |w(x)|^2\}.$$

Интегрируя это тождество в пределах от 0 до 1, получаем

$$\{u(1)\overline{w(1)} - \overline{u(1)}w(1)\} - \{u(0)\overline{w(0)} - \overline{u(0)}w(0)\} = (\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \int_0^1 \{|u(x)|^2 + |w(x)|^2\}\,dx. \tag{1.1}$$

Условия (0.2) и (0.3) перепишем в виде

$$u(0) = [(\lambda_0\sin\alpha + b_0)/(\lambda_0\cos\alpha + a_0)]w(0), \quad u(1) = [(\lambda_0\sin\beta + b_1)/(\lambda_0\cos\beta + a_1)]w(1).$$

Учитывая эти соотношения, находим, что

$$u(1)\overline{w(1)}-\overline{u(1)}w(1)=(\lambda_0-\overline{\lambda_0})\sigma_1|w(1)|^2/|\lambda_0\cos\beta+a_1|^2,$$

$$u(0)\overline{w(0)}-\overline{u(0)}w(0)=(\lambda_0-\overline{\lambda_0})\sigma_0|w(0)|^2/|\lambda_0\cos\alpha+a_0|^2,$$

где σ_0 и σ_1 – постоянные, определенные в (0.4). Поскольку $\lambda_0\neq\overline{\lambda_0}$, то из последних двух равенств и (1.1) получаем

$$\frac{\sigma_1|w(1)|^2}{|\lambda_0\cos\beta+a_1|^2}-\frac{\sigma_0|w(0)|^2}{|\lambda_0\cos\alpha+a_0|^2}=\int\limits_0^1\{|u(x)|^2+|w(x)|^2\}\,dx.$$

Последнее противоречит условиям $\int_0^1\{|u(x)|^2+|w(x)|^2\}\,dx>0$, $\sigma_0>0$ и $\sigma_1<0$. Следовательно, λ_0 должно быть вещественным. Лемма 1.1 доказана.

Нетрудно доказать, что существует единственное решение системы уравнений (0.1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(0,\lambda)=\lambda\sin\alpha+b_0,\quad w(0,\lambda)=\lambda\cos\alpha+a_0, \tag{1.2}$$

причем при каждом фиксированном $x\in[0,1]$ функции $u(x,\lambda)$, $w(x,\lambda)$ являются целыми функциями аргумента λ. Доказательство этого факта с очевидными изменениями повторяет доказательство теоремы 1.1 из [15, с. 14].

Заметим, что собственными значениями краевой задачи (0.1)–(0.3) являются корни уравнения

$$(\lambda\cos\beta+a_1)u(1,\lambda)-(\lambda\sin\beta+b_1)w(1,\lambda)=0. \tag{1.3}$$

Лемма 1.2. *Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) образуют не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки. Все собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) простые.*

Доказательство. Собственные значения являются нулями целой функции, стоящей в левой части уравнения (1.3). Мы показали (лемма 1.1), что эта функция не обращается в нуль при невещественных λ. Следовательно, она не равна нулю тождественно. Поэтому ее нули образуют не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки.

В силу (0.1) имеем $(d/dx)\{u(x,\lambda)w(x,\mu)-u(x,\mu)w(x,\lambda)\}=(\lambda-\mu)\{u(x,\lambda)u(x,\mu)+w(x,\lambda)w(x,\mu)\}$. Интегрируя это тождество в пределах от 0 до 1 и принимая во внимание (1.2), получаем

$$u(1,\lambda)w(1,\mu)-u(1,\mu)w(1,\lambda)-\sigma_0(\lambda-\mu)=(\lambda-\mu)\int\limits_0^1\{u(x,\lambda)u(x,\mu)+w(x,\lambda)w(x,\mu)\}\,dx. \tag{1.4}$$

Будем использовать равенство

$$w(1,\lambda)\frac{\partial u(1,\lambda)}{\partial\lambda}-u(1,\lambda)\frac{\partial w(1,\lambda)}{\partial\lambda}=\sigma_0+\int\limits_0^1[\{u(x,\lambda)\}^2+\{w(x,\lambda)\}^2]\,dx, \tag{1.5}$$

которое получается из (1.4) делением обеих частей последнего на $(\lambda-\mu)$ и последующим предельным переходом при $\mu\to\lambda$.

Докажем, что уравнение (1.3) имеет только простые корни. Действительно, если $\lambda=\lambda^*$ является кратным корнем уравнения (1.3), то имеют место равенства

$$\begin{gathered}(\lambda^*\cos\beta+a_1)u(1,\lambda^*)-(\lambda^*\sin\beta+b_1)w(1,\lambda^*)=0,\\ u(1,\lambda^*)\cos\beta+(\lambda^*\cos\beta+a_1)\partial u(1,\lambda^*)/\partial\lambda-w(1,\lambda^*)\sin\beta-(\lambda^*\sin\beta+b_1)\partial w(1,\lambda^*)/\partial\lambda=0.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Поскольку $\sigma_1 \neq 0$, то $(\lambda^* \cos\beta + a_1)^2 + (\lambda^* \sin\beta + b_1)^2 \neq 0$. Пусть $\lambda^* \cos\beta + a_1 \neq 0$. Из (1.6) соответственно следуют соотношения

$$u(1,\lambda^*) = [(\lambda^* \sin\beta + b_1)/(\lambda^* \cos\beta + a_1)]w(1,\lambda^*),$$

$$\frac{\partial u(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} = \frac{\sigma_1 w(1,\lambda^*)}{(\lambda^*\cos\beta + a_1)^2} + \frac{\lambda^*\sin\beta + b_1}{\lambda^*\cos\beta + a_1}\frac{\partial w(1,\lambda^*)}{\partial\lambda}.$$

Используя последние равенства в (1.5) при $\lambda = \lambda^*$, получаем $\sigma_1\{w(1,\lambda^*)\}^2/(\lambda^*\cos\beta + a_1)^2 = \sigma_0 + \int_0^1 [\{u(x,\lambda^*)\}^2 + \{w(x,\lambda^*)\}^2]\,dx$, что исключено в силу условия (0.4).

Случай $\lambda^* \sin\beta + b_1 \neq 0$ рассматривается совершенно аналогично. Лемма 1.2 доказана.

2. Некоторые вспомогательные утверждения.

I. Пусть функции $P_\nu(x)$, $R_\nu(x)$ $(\nu = 1,2)$ принадлежат классу $C[0,1]$ и $P_2(x) > P_1(x) > 0$, $R_2(x) > R_1(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$.

Пусть даны две системы уравнений

$$\varphi_\nu' - P_\nu(x)\psi_\nu = 0, \quad \psi_\nu' + R_\nu(x)\varphi_\nu = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{2.1_ν}$$

и $(\varphi_1(x), \psi_1(x))$, $(\varphi_2(x), \psi_2(x))$ – произвольные нетривиальные решения соответственно этих систем.

Следующие два утверждения являются простыми следствиями теорем сравнения из [16, с. 152–153].

Утверждение 2.1. *Если $\varphi_1(0) = 0$ или $\varphi_1(0) \neq 0$, $\varphi_2(0) \neq 0$, $\psi_1(0)/\varphi_1(0) \geq \psi_2(0)/\varphi_2(0)$, то функция $\varphi_2(x)$ имеет на интервале $0 < x \leq 1$ по крайней мере столько же нулей, сколько и $\varphi_1(x)$, причем k-й нуль функции $\varphi_2(x)$ меньше k-го нуля функции $\varphi_1(x)$; если $\psi_1(0) = 0$ или $\psi_1(0) \neq 0$, $\psi_2(0) \neq 0$, $\varphi_1(0)/\psi_1(0) \leq \varphi_2(0)/\psi_2(0)$, то $\psi_2(x)$ имеет на интервале $0 < x \leq 1$ по крайней мере столько же нулей, сколько и $\psi_1(x)$, причем k-й нуль функции $\psi_2(x)$ меньше k-го нуля функции $\psi_1(x)$.*

Утверждение 2.2. *Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют на интервале $0 < x < 1$ одинаковое число нулей и если $\varphi_1(1) \neq 0$, $\varphi_2(1) \neq 0$, то $\psi_1(1)/\varphi_1(1) > \psi_2(1)/\varphi_2(1)$; если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ имеют на интервале $0 < x < 1$ одинаковое число нулей и если $\psi_1(1) \neq 0$, $\psi_2(1) \neq 0$, то $\varphi_1(1)/\psi_1(1) < \varphi_2(1)/\psi_2(1)$.*

Предположим, что $Q = \{\mu : \mu\cos\alpha + a_0 = 0$ или $\mu\sin\alpha + b_0 = 0\}$ и $\mu_* = \min Q$, $\mu^* = \max Q$. Из утверждения 2.1 вытекает

Лемма 2.1. *Пусть $(\varphi_\nu(x), \psi_\nu(x))$ – решение системы уравнений (2.1_ν), удовлетворяющее начальному условию*

$$\varphi_\nu(0) = \lambda^{(\nu)}\sin\alpha + b_0, \quad \psi_\nu(0) = \lambda^{(\nu)}\cos\alpha + a_0 \quad (\nu = 1,2). \tag{2.2}$$

Кроме того, пусть либо $\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \mu_*$, либо $\mu_* < \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \mu^*$, либо $\mu^* < \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)}$. Тогда $\varphi_2(x)$ $(\psi_2(x))$ имеет в интервале $0 < x \leq 1$ по крайней мере столько же нулей, сколько и $\varphi_1(x)$ (соответственно $\psi_1(x)$), причем k-й нуль $\varphi_2(x)$ $(\psi_2(x))$ меньше k-го нуля $\varphi_1(x)$ $(\psi_1(x))$.

Доказательство. Пусть $T_0(\lambda) = (\lambda\cos\alpha + a_0)(\lambda\sin\alpha + b_0)^{-1}$. Имеем $T_0'(\lambda) = -\sigma_0(\lambda\sin\alpha + b_0)^{-2}$. Так как по предположению (0.4) $\sigma_0 > 0$, то функция $T_0(\lambda)$ строго убывает в любом интервале, где $\lambda\sin\alpha + b_0 \neq 0$. Следовательно, $\psi_1(0)/\varphi_1(0) = T_0(\lambda^{(1)}) > T_0(\lambda^{(2)}) = \psi_2(0)/\varphi_2(0)$. Отсюда и из утверждения 2.1 следует часть леммы 2.1, относящаяся к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Пусть $T_1(\lambda) = (\lambda\sin\alpha + b_0)(\lambda\cos\alpha + a_0)^{-1}$. Имеем $T_1'(\lambda) = \sigma_0(\lambda\cos\alpha + a_0)^{-2}$. Следовательно, $T_1(\lambda)$ строго возрастает в каждом из интервалов $(-\infty, \mu_*)$ (μ_*, μ^*) и $(\mu^*, +\infty)$. Таким образом, $\varphi_1(0)/\psi_1(0) = T_1(\lambda^{(1)}) < T_1(\lambda^{(2)}) = \varphi_2(0)/\psi_2(0)$. Отсюда и из утверждения 2.1 следует часть леммы 2.1, относящаяся к функциям $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$. Лемма 2.1 доказана.

Аналогичным образом доказывается

Лемма 2.2. *Пусть $(\varphi_\nu(x), \psi_\nu(x))$ – решение системы уравнений $\varphi_\nu' + P_\nu(x)\psi_\nu = 0$, $\psi_\nu' - R_\nu(x)\varphi_\nu = 0$, удовлетворяющее начальному условию (2.2). Кроме того, пусть либо*

$\lambda^{(2)} < \lambda^{(1)} < \mu_*$, *либо* $\mu_* < \lambda^{(2)} < \lambda^{(1)} < \mu^*$, *либо* $\mu^* < \lambda^{(2)} < \lambda^{(1)}$. *Тогда справедливо утверждение леммы 2.1.*

II. Пусть $\varphi(x), \psi(x)$ – произвольное нетривиальное решение системы уравнений $\varphi' - p(x)\psi = 0$, $\psi' + r(x)\varphi = 0$, где $p(x) \in C[0,1]$, $r(x) \in C[0,1]$ и $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ при $0 \le x \le 1$.

Через $x^{(0)}(f)$ $(x^{(1)}(f))$ обозначим ближайший к точке 0 (соответственно 1), но отличный от этой точки нуль функции $f(x) \in C[0,1]$.

Лемма 2.3. *Между каждыми двумя последовательными нулями функции* $\varphi(x)$ $(\psi(x))$ *заключен единственный нуль функции* $\psi(x)$ *(функции* $\varphi(x)$*). Кроме того, если существует* $x^{(0)}(\varphi)$ $(x^{(0)}(\psi))$ *и справедливо условие* $\varphi(0)\psi(0) > 0$ $(\varphi(0)\psi(0) < 0)$, *то существует* $x^{(0)}(\psi)$ $(x^{(0)}(\varphi))$ *и* $x^{(0)}(\psi) < x^{(0)}(\varphi)$ *(соответственно* $x^{(0)}(\varphi) < x^{(0)}(\psi)$*); если существует* $x^{(1)}(\psi)$ $(x^{(1)}(\varphi))$ *и справедливо условие* $\varphi(1)\psi(1) > 0$ $(\varphi(1)\psi(1) < 0)$, *то существует* $x^{(1)}(\varphi)$ $(x^{(1)}(\psi))$ *и* $x^{(1)}(\psi) < x^{(1)}(\varphi)$ *(соответственно* $x^{(1)}(\varphi) < x^{(1)}(\psi)$*).*

Доказательство. Первая часть утверждения тривиальна. Докажем вторую часть.

Пусть существует $x^{(0)}(\varphi)$ и справедливо условие $\varphi(0)\psi(0) > 0$. Предположим, что или $x^{(0)}(\psi)$ не существует, или существует, но $x^{(0)}(\psi) > x^{(0)}(\varphi)$. В обоих случаях при $0 \le x \le$ $\le x^{(0)}(\varphi)$ справедливо неравенство

$$\varphi(x)\psi(x) > 0. \tag{2.3}$$

Интегрируя тождество $(\varphi^2(x))' = 2p(x)\varphi(x)\psi(x)$ в пределах от 0 до $x^{(0)}(\varphi)$, получаем $-\varphi^2(0) = 2\int_0^{x^{(0)}(\varphi)} p(x)\varphi(x)\psi(x)\,dx$. В силу (2.3) в последней формуле правая часть положительна, а левая – отрицательна. Следовательно, существует $x^{(0)}(\psi)$ и $x^{(0)}(\psi) < x^{(0)}(\varphi)$.

Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Лемма 2.3 доказана.

Число нулей функции $f(x) \in C[0,1]$ в интервале $(0,1)$ обозначим через $N(f)$, и пусть $t_j(f)$ $(j = \overline{1, N(f)})$ – нули функции $f(x)$: $0 < t_1(f) < \ldots < t_{N(f)}(f) < 1$.

Из леммы 2.3 вытекает

Следствие 2.1. *Если* $\varphi(0)\psi(0) > 0$ *и* $\varphi(1)\psi(1) > 0$, *то* $N(\varphi) = N(\psi)$ *и* $0 < t_1(\psi) <$ $< t_1(\varphi) < \ldots < t_{N(\psi)}(\psi) < t_{N(\varphi)}(\varphi) < 1$; *если* $\varphi(0)\psi(0) < 0$ *и* $\varphi(1)\psi(1) < 0$, *то* $N(\varphi) = N(\psi)$ *и* $0 < t_1(\varphi) < t_1(\psi) < \ldots < t_{N(\varphi)}(\varphi) < t_{N(\psi)}(\psi) < 1$; *если* $\varphi(0)\psi(0) > 0$ *и* $\varphi(1)\psi(1) < 0$, *то* $N(\psi) = N(\varphi) + 1$ *и* $0 < t_1(\psi) < t_1(\varphi) < \ldots < t_{N(\varphi)}(\varphi) < t_{N(\psi)}(\psi) < 1$; *если* $\varphi(0)\psi(0) < 0$ *и* $\varphi(1)\psi(1) > 0$, *то* $N(\varphi) = N(\psi) + 1$ *и* $0 < t_1(\varphi) < t_1(\psi) < \ldots < t_{N(\psi)}(\psi) < t_{N(\varphi)}(\varphi) < 1$.

3. Осцилляционные свойства собственных вектор-функций краевой задачи (0.1)–(0.3). Пусть $(u(x,\lambda), w(x,\lambda))$ – решение системы уравнений (0.1), удовлетворяющее начальному условию (1.2).

Предположим, что $G = \{\mu : \mu\cos\beta + a_1 = 0$ или $\mu\sin\beta + b_1 = 0\}$, $\widetilde{\mu}_* = \min(Q \cup G)$, $\widetilde{\mu}^* = \max(Q \cup G)$, $M = \max\{\max\limits_{0\le x\le 1}|P(x)|, \max\limits_{0\le x\le 1}|R(x)|\}$, $\widetilde{\lambda}_* = \min\{\widetilde{\mu}_*, -M\}$, $\widetilde{\lambda}^* = \max\{\widetilde{\mu}^*, M\}$, где Q определено в п. 2.

Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает

Следствие 3.1. *Если* $\lambda'' > \lambda' > \widetilde{\lambda}^*$ *или* $\lambda'' < \lambda' < \widetilde{\lambda}_*$, *то* $u(x,\lambda'')$ $(w(x,\lambda''))$ *имеет на интервале* $0 < x \le 1$ *по крайней мере столько же нулей, сколько и* $u(x,\lambda')$ $(w(x,\lambda'))$, *причем* k*-й нуль* $u(x,\lambda'')$ $(w(x,\lambda''))$ *меньше* k*-го нуля* $u(x,\lambda')$ $(w(x,\lambda'))$.

Рассмотрим уравнение $u(x,\lambda) = 0$ $(w(x,\lambda) = 0)$, где $0 \le x \le 1$. Очевидно, что корни этого уравнения суть функции от λ.

В следующих двух утверждениях будем предполагать, что $\lambda \overline{\in} [\widetilde{\lambda}_*, \widetilde{\lambda}^*]$.

Лемма 3.1 *Если* x_0 $(0 < x_0 \le 1)$ *– нуль функции* $u(x,\lambda_0)$ $(w(x,\lambda_0))$, *то любому достаточно малому числу* $\varepsilon > 0$ *соответствует такое число* $\delta > 0$, *что при* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ *функция* $u(x,\lambda)$ $(w(x,\lambda))$ *имеет в точности один нуль в интервале* $|x - x_0| < \varepsilon$.

Доказательство этого факта дословно повторяет доказательство леммы 3.1 из [15, с. 30].

Из этой леммы вытекает

Следствие 3.2. *При изменении* λ *функция* $u(x,\lambda)$ $(w(x,\lambda))$ *только тогда может потерять нуль или приобрести новый, если она войдет внутрь интервала или выйдет оттуда через краевые точки* 0 *и* 1.

Существование счетного множества собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3) доказывает

Теорема 3.1. *Существуют неограниченно убывающая последовательность отрицательных собственных значений* $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ *и неограниченно возрастающая последовательность неотрицательных собственных значений* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *краевой задачи (0.1)–(0.3)*

$$\ldots < \lambda_{-n} < \lambda_{-n+1} < \ldots < \lambda_{-1} < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots$$

Кроме того, существуют такие числа n^*, n_*, k^*, $k_* \in N \cup \{0\}$, *что собственные вектор-функции* $(u_n(x), w_n(x))$ *при* $n > n^*$ *и* $(u_{-n}(x), w_{-n}(x))$ *при* $n > n_*$, *соответствующие собственным значениям* λ_n $(n > n_*)$ *и* λ_{-n} $(n > n_*)$, *имеют следующие свойства:*

a_1) *если* $\alpha \in \{-\pi/2\} \cup (0, \pi/2]$ *и* $\beta \in [0, \pi/2)$, *то* $N(w_n) = N(u_n) = n + k^* - n^*$ *и* $x^{(0)}(w_n) < x^{(0)}(u_n)$;

b_1) *если* $\alpha \in \{-\pi/2\} \cup (0, \pi/2]$ *и* $\beta \in [-\pi/2, 0) \cup \{\pi/2\}$, *то* $N(w_n) = N(u_n) + 1 = n + k^* - n^* + 1$ *и* $x^{(0)}(w_n) < x^{(0)}(u_n)$;

c_1) *если* $\alpha \in (-\pi/2, 0]$ *и* $\beta \in [0, \pi/2)$, *то* $N(u_n) = N(w_n) + 1 = n + k^* - n^*$ *и* $x^{(0)}(u_n) < x^{(0)}(w_n)$;

d_1) *если* $\alpha \in (-\pi/2, 0]$ *и* $\beta \in [-\pi/2, 0) \cup \{\pi/2\}$, *то* $N(u_n) = N(w_n) = n + k^* - n^*$ *и* $x^{(0)}(u_n) < x^{(0)}(w_n)$;

a_2) *если* $\alpha \in [0, \pi/2)$ *и* $\beta \in \{-\pi/2\} \cup (0, \pi/2]$, *то* $N(w_{-n}) = N(u_{-n}) = n + k_* - n_*$ *и* $x^{(0)}(w_{-n}) < x^{(0)}(u_{-n})$;

b_2) *если* $\alpha \in [0, \pi/2)$ *и* $\beta \in (-\pi/2, 0]$, *то* $N(w_{-n}) = N(u_{-n}) + 1 = n + k_* - n_* + 1$ *и* $x^{(0)}(w_{-n}) < x^{(0)}(u_{-n})$;

c_2) *если* $\alpha \in [-\pi/2, 0) \cup \{\pi/2\}$ *и* $\beta \in \{-\pi/2\} \cup (0, \pi/2]$, *то* $N(u_{-n}) = N(w_{-n}) + 1 = n + k_* - n_*$ *и* $x^{(0)}(u_{-n}) < x^{(0)}(w_{-n})$;

d_2) *если* $\alpha \in [-\pi/2, 0) \cup \{\pi/2\}$ *и* $\beta \in (-\pi/2, 0]$, *то* $N(u_{-n}) = N(w_{-n}) = n + k_* - n_*$ *и* $x^{(0)}(u_{-n}) < x^{(0)}(w_{-n})$.

Доказательство. Докажем только существование и наличие свойств последовательности неотрицательных собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3). Часть теоремы, относящейся к отрицательным собственным значениям, доказывается аналогично.

Пусть $\lambda \geq \lambda^* = \widetilde{\lambda}^* + 1$, где $\widetilde{\lambda}^*$ – число, определенное в начале этого пункта, и $(u(x, \lambda), w(x, \lambda))$ – решение системы уравнений (0.1), удовлетворяющее начальному условию (1.2). В силу следствия 3.1 при возрастании λ число нулей функции $u(x, \lambda)$ не убывает.

Предположим, что $(\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda))$ – решение системы уравнений

$$\varphi' - (\lambda - M - 1/2)\psi = 0, \quad \psi' + (\lambda - M - 1/2)\varphi = 0, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(0, \lambda) = \lambda \sin\alpha + b_0, \quad \psi(0, \lambda) = \lambda \cos\alpha + a_0. \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что

$$\varphi(x, \lambda) = (\lambda \cos\alpha + a_0) \sin(\lambda - M - 1/2)x + (\lambda \sin\alpha + b_0) \cos(\lambda - M - 1/2)x.$$

При положительном и неограниченно возрастающем λ число нулей этой функции, расположенных в интервале $(0, 1)$, неограниченно растет. Сравним краевую задачу (0.1), (1.2) с краевой задачей (3.1), (3.2). Из леммы 2.1 следует, что при положительном и неограниченно возрастающем λ число нулей функции $u(x, \lambda)$, расположенных в интервале $(0, 1)$, неограниченно растет.

Рассмотрим уравнение $u(x, \lambda) = 0$ при $\lambda \geq \lambda^*$. На основании леммы 3.1 корни этого уравнения непрерывно зависят от λ. С другой стороны, в силу следствия 3.2 при возрастании λ каждый нуль функции передвигается влево, а через точку 0 выйти не может, так как число нулей не убывает. В силу следствия 3.2 нули входят через точку 1. Пусть $\widetilde{\lambda}_0$ – первое значение параметра $\lambda \geq \lambda^*$, для которого $u(1, \lambda) = 0$. Такое значение, очевидно, найдется.

Предположим, что функция $u(x,\widetilde{\lambda}_0)$ в интервале (0,1) имеет k^* нулей.

Пусть $\widetilde{\lambda}_1$ $(\widetilde{\lambda}_1 > \widetilde{\lambda}_0)$ – второе значение параметра λ, для которого $u(x,\lambda) = 0$, и т.д. Очевидно, что функция $u(x,\widetilde{\lambda}_1)$ имеет в интервале $(0,1)$ ровно k^*+1 нулей. Последовательность $\widetilde{\lambda}_0, \widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots$ обладает тем свойством, что функция $u(x,\lambda)$ при $\widetilde{\lambda}_{k-1} < \lambda \leq \widetilde{\lambda}_k$ имеет в интервале $(0,1)$ ровно $k+k^*$ нулей, причем $u(1,\widetilde{\lambda}_k) = 0$. Нетрудно заметить, что числа $\widetilde{\lambda}_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ не являются собственными значениями краевой задачи (0.1)–(0.3).

В силу утверждения 2.2 функция $w(1,\lambda)/u(1,\lambda)$ в интервале $(\widetilde{\lambda}_{k-1}, \widetilde{\lambda}_k)$ строго убывает. Так как $u(1,\widetilde{\lambda}_{k-1}) = u(1,\widetilde{\lambda}_k) = 0$, то в интервале $(\widetilde{\lambda}_{k-1}, \widetilde{\lambda}_k)$ функция $w(1,\lambda)/u(1,\lambda)$ должна строго убывать от $+\infty$ до $-\infty$.

Пусть $T(\lambda) = (\lambda\cos\beta + a_1)(\lambda\sin\beta + b_1)^{-1}$. Имеем $T'(\lambda) = -\sigma_1(\lambda\sin\beta + b_1)^{-2}$. Так как по предположению (0.4) $\sigma_1 < 0$, то функция $T(\lambda)$ строго возрастает в любом интервале, где $\lambda\sin\beta + b_1 \neq 0$.

Предположим, что n^* – число собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3), расположенных на отрезке $[0,\widetilde{\lambda}_0]$. Поскольку функция $w(1,\lambda)/u(1,\lambda)$ в интервале $(\widetilde{\lambda}_{k-1}, \widetilde{\lambda}_k)$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$, найдется единственное значение $\lambda_{n^*+k} \in (\widetilde{\lambda}_{k-1}, \widetilde{\lambda}_k)$, для которого $w(1,\lambda_{n^*+k})/u(1,\lambda_{n^*+k}) = T(\lambda_{n^*+k})$, т.е. выполняется условие (0.3). Следовательно, λ_{n^*+k} – собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3) и первая компонента соответствующей собственной функции $(u(x,\lambda_{n^*+k}), w(x,\lambda_{n^*+k}))$ в интервале $(0,1)$ имеет столько же нулей, сколько и $u(x,\widetilde{\lambda}_k)$, т.е. $k+k^*$.

Докажем утверждение a_1). По определению числа λ^* корни линейных функций $\mu\cos\alpha + a_0$, $\mu\sin\alpha + b_0$, $\mu\cos\beta + a_1$, $\mu\sin\beta + b_1$ лежат в интервале $(-\infty, \lambda^*)$. Следовательно, при $n > n^*$ имеет место

$$\operatorname{sgn}(u_n(0)w_n(0)) = \operatorname{sgn}((\lambda_n\cos\alpha + a_0)(\lambda_n\sin\alpha + b_0)) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin 2\alpha), & \text{если } \alpha \in (0,\pi/2), \\ \operatorname{sgn}(a_0\sin\alpha), & \text{если } \alpha = \pm\pi/2, \\ \operatorname{sgn}(b_0\cos\alpha), & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу (0.4) получаем, что при $\alpha \in \{-\pi/2\} \cup (0,\pi/2]$ и $n > n^*$ справедливо неравенство $u_n(0)w_n(0) > 0$. Точно таким же образом доказывается, что при $\beta \in [0,\pi/2)$ и $n > n^*$ имеет место неравенство $u_n(1)w_n(1) > 0$. Для завершения доказательства a_1) достаточно воспользоваться следствием 2.1.

Утверждения $b_1) - d_2)$ доказываются совершенно аналогично. Теорема 3.1 доказана.

4. Определение и свойства функции $\theta_n(x)$. Некоторые вспомогательные утверждения. Всюду в этом пункте будем предполагать, что $n > n^*$, где n^* – число, введенное в доказательстве теоремы 3.1.

Пусть $(u_n(x), w_n(x))$ – собственная вектор-функция краевой задачи (0.1)–(0.3), соответствующая собственному значению λ_n.

Введем угловую переменную $\theta_n(x) = \operatorname{Arctg}(u_n(x)/w_n(x))$ или, точнее,

$$\theta_n(x) = \arg\{w_n(x) + iu_n(x)\}. \tag{4.1}$$

Учитывая (0.2), определим начальное значение

$$\theta_n(0) = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n\sin\alpha + b_0}{\lambda_n\cos\alpha + a_0} + \frac{1-l_0}{2}\pi, \tag{4.2}$$

$$l_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in \{-\pi/2\} \cup (0,\pi/2], \\ -1, & \text{если } \alpha \in (-\pi/2, 0]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Для других x функция $\theta_n(x)$ задается формулой (4.1) с точностью до произвольного слагаемого, кратного 2π, поскольку функции $u_n(x)$ и $w_n(x)$ не могут обращаться в нуль одновременно. Это выражение, кратное 2π, надлежит зафиксировать так, чтобы функция $\theta_n(x)$

удовлетворяла условию (4.2) и была непрерывной по x. Этим функция $\theta_n(x)$ определяется единственным образом.

Лемма 4.1. *Функция* $\theta_n(x)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\theta_n'(x) = \lambda_n + P(x)\cos^2\theta_n(x) + R(x)\sin^2\theta_n(x) \tag{4.4}$$

и строго возрастает на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Уравнение (4.4) следует непосредственно из определения $\theta_n(x)$.

Поскольку при $n > n^*$ справедливо $\lambda_n > \lambda^* > M$, число M определено в п. 3, то при $0 \le x \le 1$ имеем $\theta_n'(x) \ge \lambda_n - M\cos^2\theta_n(x) - M\sin^2\theta_n(x) = \lambda_n - M > 0$. Последнее доказывает, что функция $\theta_n(x)$ строго возрастает на отрезке $[0,1]$. Лемма 4.1 доказана.

Из (4.1) ясно, что нули функции $u_n(x)$ совпадают с точками, в которых $\theta_n(x)$ кратно π. Рассматривая функцию $u_n(x)$, когда x возрастает от 0 до 1, видим, что она имеет нуль в точке $x \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда в этой точке $\theta_n(x)$, возрастая, проходит значение, кратное π.

Так как $0 < \theta_n(0) < \pi$, то при возрастании x от 0 до 1 функция $\theta_n(x)$ последовательно принимает конечное число значений $\pi, 2\pi, \ldots$ Поскольку функция $\theta_n(x)$ не может, убывая, стремиться к углу, кратному π, то она достигает углов, кратных π, в порядке возрастания.

Обозначим через $x_{n,k}$ $(k = \overline{1,k_n})$ нули функции $u_n(x)$ в интервале $(0,1)$: $0 < x_{n,1} < \ldots$ $\ldots < x_{n,k_n} < 1$. Из осцилляционной теоремы 3.1 следует, что при $n > n^*$ справедливо $k_n = n + k^* - n^*$.

Нетрудно заметить, что

$$\theta_n(x_{n,k}) = \pi k \quad (k = \overline{1,k_n}), \tag{4.5}$$

$$\theta_n(1) = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n \sin\beta + b_1}{\lambda_n\cos\beta + a_1} + \frac{1-l_1}{2}\pi + \pi k_n, \tag{4.6}$$

$$l_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta \in [0,\pi/2), \\ -1, & \text{если } \beta \in [-\pi/2, 0) \cup \{\pi/2\}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Лемма 4.2. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\lambda_n = \pi n + O(1), \quad \Delta x_{n,k} = x_{n,k+1} - x_{n,k} = O(n^{-1}) \quad (k = \overline{0,k_n}), \tag{4.8}$$

где $x_{n,0} = 0$ *и* $x_{n,k_n+1} = 1$.

Доказательство. Интегрируя тождество (4.4) в пределах от 0 до 1, получим $\theta_n(1) - \theta_n(0) = \lambda_n + \int_0^1 \{P(x)\cos^2\theta_n(x) + R(x)\sin^2\theta_n(x)\}\,dx$. Поскольку интеграл в последнем равенстве есть $O(1)$, то имеем

$$\lambda_n = \theta_n(1) - \theta_n(0) + O(1). \tag{4.9}$$

Учитывая (4.2) и (4.6), получаем $0 < \theta_n(0) < \pi$, $\pi k_n < \theta_n(1) < \pi(k_n+1)$, откуда вытекает соотношение $\theta_n(1) - \theta_n(0) = \pi k_n + O(1)$, из которого и из (4.9), равенства $k_n = n + k^* - n^*$ следует первая из асимптотических формул (4.8).

Докажем вторую из формул (4.8). Снова интегрируя тождество (4.4) в пределах от $x_{n,k}$ до $x_{n,k+1}$ и учитывая, что интеграл в полученном равенстве есть $O(1)$, имеем

$$\lambda_n \Delta x_{n,k} = \theta_n(x_{n,k+1}) - \theta_n(x_{n,k}) + O(1). \tag{4.10}$$

Из (4.2), (4.5), (4.6) и из возрастания функции $\theta_n(x)$ следует, что

$$0 \le \theta_n(x_{n,k+1}) - \theta_n(x_{n,k}) = \left\{ \begin{array}{lll} \pi - \theta_n(0), & \text{если} & k = 0, \\ \pi, & \text{если} & 1 \le k \le k_n - 1, \\ \theta_n(1) - \pi k_n, & \text{если} & k = k_n, \end{array} \right\} \le \pi.$$

Отсюда и из (4.10) имеем $\lambda_n \Delta x_{n,k} = O(1)$. Из этой формулы с учетом доказанной первой из формул (4.8) вытекает справедливость второй. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Для произвольной функции* $f(x) \in C[0,1]$ *справедливо* $\int_0^1 f(x)\cos 2\theta_n(x)\,dx = O(w_f(n^{-1}))$, *где* $w_f(\delta) = \delta + w_f^*(\delta)$ *и* $w_f^*(\delta)$ *– модуль непрерывности функции* $f(x)$ *на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Сначала докажем, что при $1 \le k \le k_n - 1$ справедливо соотношение $\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} \cos 2\theta_n(x)\,dx = O(n^{-2})$. Поскольку $\theta_n'(x) = \lambda_n + O(1)$, то в силу леммы 4.2 при $1 \le k \le k_n - 1$ имеем

$$\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} \cos 2\theta_n(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} \theta_n'(x)\cos 2\theta_n(x)\,dx + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} O(1)\cos 2\theta_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos\varphi\,d\varphi + O\left(\frac{\Delta x_{n,k}}{\lambda_n}\right) = O\left(\frac{\Delta x_{n,k}}{\lambda_n}\right) = O(n^{-2}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 f(x)\cos 2\theta_n(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{x_{n,1}} f(x)\cos 2\theta_n(x)\,dx + \int\limits_{x_{n,k_n}}^1 f(x)\cos 2\theta_n(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k_n-1}\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\cos 2\theta_n(x)\,dx =$$

$$= O(\Delta x_{n,1}) + O(\Delta x_{n,k_n}) + \sum_{k=1}^{k_n-1} f(x_k)\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} \cos 2\theta_n(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k_n-1}\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} (f(x) - f(x_k))\cos 2\theta_n(x)\,dx =$$

$$= O(n^{-1}) + O(n^{-2})\sum_{k=1}^{k_n-1}|f(x_k)| + \sum_{k=1}^{k_n-1} O(\omega_f^*(\Delta x_{n,k})\Delta x_{n,k}) = O(n^{-1}) + O(\omega_f^*(n^{-1})) = O(\omega_f(n^{-1})).$$

Лемма 4.3 доказана.

5. Асимптотические формулы для собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3). Всюду в этом пункте будем считать, что n – достаточно большое по абсолютной величине целое число.

Пусть $(\Phi_n(x), \Psi_n(x))$ – собственная вектор-функция краевой задачи (0.1)–(0.3), причем $\Phi_n(x)$ имеет $|n|$ нулей в интервале $(0,1)$. Через μ_n обозначим собственное значение, соответствующее вектор-функции $(\Phi_n(x), \Psi_n(x))$. Из осцилляционной теоремы 3.1 следует, что $\mu_n = \lambda_{n-k^*+n^*}$ при $n > 0$ и $\mu_n = \lambda_{n+k_*-n_*}$ при $n < 0$.

Теорема 5.1. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\mu_n = \pi n + \beta - \alpha - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}\beta + \operatorname{sgn}(-\alpha)) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (P(x) + R(x))\,dx + O(\omega(n^{-1})), \quad \text{если } n > 0, \tag{5.1}$$

$$\mu_n = \pi n + \beta - \alpha + \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}\alpha + \operatorname{sgn}(-\beta)) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (P(x) + R(x))\,dx + O(\omega(|n|^{-1})), \quad \text{если } n < 0, \tag{5.2}$$

где $\operatorname{sgn} t = 1$ *при* $t \ge 0$ *и* $\operatorname{sgn} t = -1$ *при* $t < 0$, $w(\delta) = \delta + w_1(\delta)$ *и* $w_1(\delta)$ *– модуль непрерывности функции* $P(x) - R(x)$ *на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Сначала докажем формулу (5.1). Введем функцию $\widetilde{\theta}_n(x) = \arg(\Psi_n(x) + i\Phi_n(x))$. В силу леммы 4.1 эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\widetilde{\theta}_n{}'(x) = \mu_n + 2^{-1}(P(x) + R(x)) + 2^{-1}(P(x) - R(x))\cos 2\widetilde{\theta}_n(x) \tag{5.3}$$

и строго возрастает на $[0,1]$, причем $\widetilde{\theta}_n(0)$ и $\widetilde{\theta}_n(1)$ определяются соответственно формулами (4.2), (4.6) с заменой в них λ_n на μ_n и k_n на n.

Используя эти формулы, непосредственным вычислением можно легко убедиться, что

$$\widetilde{\theta}_n(0) = \alpha + \pi/2 + (\pi/2)\operatorname{sgn}(-\alpha) + O(n^{-1}), \quad \widetilde{\theta}_n(1) = \pi n + \beta + \pi/2 - (\pi/2)\operatorname{sgn}\beta + O(n^{-1}). \tag{5.4}$$

Интегрируя обе части уравнения (5.3) в пределах от 0 до 1 и принимая во внимание соотношения (5.4), получаем справедливость равенства

$$\pi n + \beta - \alpha - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}\beta + \operatorname{sgn}(-\alpha)) + O(n^{-1}) =$$

$$= \mu_n + \frac{1}{2}\int_0^1 (P(x) + R(x))\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (P(x) - R(x))\cos 2\widetilde{\theta}_n(x)\,dx.$$

Для завершения доказательства формулы (5.1) достаточно заметить, что в силу леммы 4.2 имеет место $\int_0^1 (P(x) - R(x))\cos 2\widetilde{\theta}_n(x)\,dx = O(\omega(n^{-1}))$.

Докажем формулу (5.2). Пусть n – отрицательное целое число. Рассмотрим краевую задачу

$$\Phi^{*'}(x) - \{\lambda - P(1-x)\}\Psi^*(x) = 0, \quad \Psi^{*'}(x) + \{\lambda - R(1-x)\}\Phi^*(x) = 0, \tag{5.5}$$

$$(\lambda\cos\alpha^* + a_0^*)\Phi^*(0) - (\lambda\sin\alpha^* + b_0^*)\Psi^*(0) = 0, \quad (\lambda\cos\beta^* + a_1^*)\Phi^*(1) - (\lambda\sin\beta^* + b_1^*)\Psi^*(1) = 0, \tag{5.6}$$

где $\alpha^* = \beta$, $\beta^* = \alpha$, $a_0^* = -a_1$, $b_0^* = -b_1$, $a_1^* = -a_0$, $b_1^* = -b_0$. Так как $\sigma_0^* = a_0^*\sin\alpha^* - b_0^*\cos\alpha^* = -a_1\sin\beta + b_1\cos\beta = -\sigma_1 > 0$ и $\sigma_1^* = a_1^*\sin\beta^* - b_1^*\cos\beta^* = -a_0\sin\alpha + b_0\cos\alpha = -\sigma_0 < 0$, то к краевой задаче (5.5), (5.6) применима теорема 3.1. Если $(\Phi_{|n|}^*(x), \Psi_{|n|}^*(x))$ – собственная вектор-функция краевой задачи (5.5), (5.6), соответствующая собственному значению $\mu_{|n|}^*$, и если при этом функция $\Phi_{|n|}^*(x)$ имеет в интервале $(0,1)$ $|n|$ нулей, то в силу только что доказанной формулы (5.1) имеем

$$\mu_{|n|}^* = \pi|n| + \beta^* - \alpha^* - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}\beta^* + \operatorname{sgn}(-\alpha^*)) + \frac{1}{2}\int_0^1 (P(1-x) + R(1-x))\,dx + O(\omega(|n|^{-1}))$$

или, что то же самое,

$$\mu_{|n|}^* = \pi|n| + \alpha - \beta - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}\alpha + \operatorname{sgn}(-\beta)) + \frac{1}{2}\int_0^1 (P(x) + R(x))\,dx + O(\omega(|n|^{-1})). \tag{5.7}$$

Легко проверить, что вектор функция $(\Phi_{|n|}^*(1-x), \Psi_{|n|}^*(1-x))$ является собственной вектор-функцией краевой задачи (0.1)–(0.3), соответствующей собственному значению $(-\mu_{|n|}^*)$, и при этом функция $\Phi_{|n|}^*(1-x)$ в интервале $(0,1)$ имеет точно $|n|$ нулей. Следовательно, при $n < 0$ имеем $\mu_n = -\mu_{|n|}^*$. Отсюда и из (5.7) получим требуемую формулу (5.2). Доказательство теоремы 5.1 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Walter J.* // Math. Z. 1973. Bd 133. № 4. S. 301–312.
2. *Fulton C.T.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1977. V. 77. P. 293–308.
3. *Schneider A.* // Math. Z. 1974. Bd 136. № 2. S. 163–167.
4. *Hinton D.B.* // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1979. V. 30. № 2. P. 33–42.
5. *Руссаковский Е.М.* // Функц. анализ и его приложения. 1975. Т. 9. № 4. С. 91–92.
6. *Шкаликов А.А.* // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 4. С. 92–93.
7. *Шкаликов А.А.* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190–229.
8. *Махмудов А.П.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 6. С. 1318–1323.
9. *Мелешко С.В., Покорный Ю.В.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1466–1467.
10. *Керимов Н.Б., Аллахвердиев Т.И.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 1. С. 54–60.
11. *Керимов Н.Б., Аллахвердиев Т.И.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 952–960.
12. *Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K.* // Proc. Edinburgh. Math. Soc. Ser. 2. 1994. V. 37. № 1. P. 57–72.
13. *Binding P.A., Browne P.J.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 127. 1997. № 6. P. 1123–1136.
14. *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 325–335.
15. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М., 1970.
16. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976.

Бакинский государственный университет

Поступила в редакцию
15.05.2001 г.