Н. Б. Керимов, З. С. Алиев, Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 65–86

DOI: 10.4213/sm1433

УДК 517.927.25

Н. Б. Керимов, З. С. Алиев

Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии

В работе рассматривается граничная задача

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \qquad 0 < x < l,$$
$$y(0) = y'(0) = y''(l) = 0, \qquad (a\lambda + b)y(l) = (c\lambda + d)Ty(l),$$

где λ – спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, $q(x)$ – строго положительная и абсолютно непрерывная функция на $[0,l]$, a, b, c, d – действительные постоянные, удовлетворяющие условию $bc - ad > 0$. Изучаются осцилляционные свойства собственных функций и выводятся асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. Исследуются базисные свойства в $L_p(0,l)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций.

Библиография: 20 названий.

Рассмотрим краевую задачу

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \qquad x \in (0,l), \tag{0.1}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(l) = 0, \tag{0.2}$$

$$(a\lambda + b)y(l) = (c\lambda + d)Ty(l), \tag{0.3}$$

где λ – спектральный параметр, $q(x)$ – строго положительная и абсолютно непрерывная функция на промежутке $[0,l]$, $Ty \equiv y''' - qy'$ и a, b, c, d – действительные постоянные. Задачи такого типа встречаются в механике. Если в граничном условии $b = c = 0$, $d = 1$, то краевая задача (0.1)–(0.3) возникает при описании поперечных колебаний маятника, образованного из вертикально расположенного однородного стержня с защемленным верхним концом и с грузом на нижнем конце, масса которого равна $-a$; при этом учитываются упругие реакции не только на прогиб, но и на растяжение [1] (см. также [2]). Более полные сведения о физическом смысле задач подобного типа можно найти в [3].

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$\sigma = bc - ad > 0. \tag{0.4}$$

Настоящая работа посвящена исследованию базисных свойств в пространствах $L_p(0,l)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3).

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях в различных постановках изучались во многих работах (см., например, [1], [4]–[12]). В [8]–[12] исследованы базисность в различных функциональных пространствах системы собственных функций спектральной задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в одном из граничных условий.

Для изучения свойств базисности системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3) в пространствах $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, нам необходимо привлечение осцилляционных свойств собственных функций этой задачи.

§ 1. Некоторые вспомогательные факты

Введем краевые условия (см. [13; § 1])

$$y(0)=y'(0)=0, \qquad y'(l)\cos\gamma+y''(l)\sin\gamma=0, \tag{0.2$'$}$$

$$y(l)\cos\delta-Ty(l)\sin\delta=0, \tag{0.3$'$}$$

где $\gamma,\delta\in[0,\pi/2]$.

Наряду с краевой задачей (0.1)–(0.3) рассмотрим краевую задачу (0.1), (0.2′), (0.3′). Задача (0.1), (0.2′), (0.3′) в более общей постановке рассмотрена в [13]. В работе [13] исследуются осцилляционные свойства собственных функций и их производных, отвечающих положительным собственным значениям. Полученные в [13] результаты основаны на лемме 2.1 из [13], которая справедлива только при положительных значениях спектрального параметра. Предложенный нами метод исследования осцилляционных свойств позволяет получить соответствующие результаты также и для неположительных значений спектрального параметра.

Как и в [13], для изучения осцилляционных свойств собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3) будем использовать преобразование типа Прюфера следующего вида:

$$\begin{cases} y(x)=r(x)\sin\psi(x)\cos\theta(x),\\ y'(x)=r(x)\cos\psi(x)\sin\varphi(x),\\ y''(x)=r(x)\cos\psi(x)\cos\varphi(x),\\ Ty(x)=r(x)\sin\psi(x)\sin\theta(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

Уравнение (0.1) допускает эквивалентную формулировку в матричной форме:

$$U'=MU, \tag{1.2}$$

где

$$U=\begin{pmatrix} y\\ y'\\ y''\\ Ty\end{pmatrix}, \qquad M=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&q&0&1\\ \lambda&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Полагая $w(x)=\operatorname{ctg}\psi(x)$ и применяя преобразование (1.1) к (1.2), получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций r, w, θ, φ следующего вида:

$$r'=\bigl[\sin2\psi\sin(\theta+\varphi)+(q+1)\cos^2\psi\sin2\varphi+\lambda\sin^2\psi\sin2\theta\bigr]\frac{r}{2}, \tag{1.3a}$$

$$w' = -w^2\cos\theta\sin\varphi + \frac{1}{2}(q+1)w\sin 2\varphi + \sin\theta\cos\varphi - \frac{\lambda}{2}\,w\sin 2\theta, \tag{1.3b}$$

$$\theta' = -w\sin\varphi\sin\theta + \lambda\cos^2\theta, \tag{1.3c}$$

$$\varphi' = \cos^2\varphi - q\sin^2\varphi - \frac{1}{w}\sin\theta\sin\varphi. \tag{1.3d}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1.1 (см. [13; § 2, лемма 2.1]). *Пусть $y(x,\lambda)$ – нетривиальное решение уравнения (0.1) при $\lambda > 0$. Если y, y', y'', Ty неотрицательны при $x = a$ и не все равны нулю одновременно, то они положительны при $x > a$. Если же y, $-y'$, y'', $-Ty$ неотрицательны при $x = a$ и не все равны нулю одновременно, то они положительны при $x < a$.*

Теорема 1.1 (см. [13; § 3, теорема 3.1]). *Пусть $y(x,\lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) при $\lambda > 0$. Тогда якобиан $J[y] = r^3\sin\psi\cos\psi$ преобразования (1.1) отличен от нуля при $x \in (0,l)$.*

Теорема 1.2 (см. [13; § 3, теорема 3.3]). *Пусть $y(x,\lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) при $\lambda > 0$, $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ – соответствующие функции из (1.1). Тогда $\theta(0,\lambda) = -\pi/2$, $\varphi(0,\lambda) = 0$.*

Теорема 1.3 (см. [13; § 4, теорема 4.2]). *Пусть $y(x,\lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) при $\lambda > 0$ и $\theta(x,\lambda)$ – соответствующая функция из (1.1). Тогда $\theta(l,\lambda)$ является непрерывной и строго возрастающей функцией от λ.*

Следующая теорема является частным случаем основного результата работы [13].

Теорема 1.4 (см. [13; § 5, теоремы 5.4 и 5.5]). *Собственные значения краевой задачи (0.1), (0.2′), (0.3′), $\gamma,\delta \in [0,\pi/2]$, образуют бесконечно возрастающую последовательность $\{\lambda_n(\gamma,\delta)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $0 < \lambda_1(\gamma,\delta) < \lambda_2(\gamma,\delta) < \cdots < \lambda_n(\gamma,\delta) < \cdots$, при этом*

$$\theta(l,\lambda_n(\gamma,\delta)) = (2n-1)\frac{\pi}{2} - \delta, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Кроме того, собственная функция $v_n^{(\gamma,\delta)}(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n(\gamma,\delta)$, имеет $n-1$ простых нулей в интервале $(0,l)$.

§ 2. О существовании и единственности решения задачи (0.1)–(0.2)

Теорема 2.1. *При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение $y(x,\lambda)$ задачи (0.1)–(0.2).*

Доказательство. Обозначим через $\varphi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$, решения уравнения (0.1), нормированные при $x = 0$ условиями Коши

$$\varphi_k^{(s-1)}(0,\lambda) = \delta_{ks}, \quad s = \overline{1,3}, \qquad T\varphi_k(0,\lambda) = \delta_{k4}, \tag{2.1}$$

где δ_{ks} – символ Кронекера. С учетом выражения $Ty = y''' - qy'$ фундаментальная система решений $\varphi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$, определяемая согласно (2.1), описывается более простой системой начальных условий

$$\varphi_k^{(s-1)}(0,\lambda) = \delta_{ks}, \quad k = 1,3,4, \quad s = \overline{1,4},$$
$$\varphi_2^{(s-1)}(0,\lambda) = \delta_{2s}, \quad s = 1,2,3, \quad \varphi_2^{(3)}(0,\lambda) = q(0).$$

Функцию $y(x,\lambda)$ будем искать в виде

$$y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} C_k \varphi_k(x,\lambda), \tag{2.2}$$

где C_k, $k = \overline{1,4}$, – некоторые постоянные.

Из (2.1), (2.2) и краевых условий (0.2) следует, что $C_1 = C_2 = 0$ и

$$C_3 \varphi_3''(l,\lambda) + C_4 \varphi_4''(l,\lambda) = 0.$$

Для завершения доказательства теоремы 2.1 достаточно показать справедливость неравенства

$$|\varphi_3''(l,\lambda)| + |\varphi_4''(l,\lambda)| > 0. \tag{2.3}$$

Из леммы 1.1 следует, что $\varphi_k''(l,\lambda) > 0$, $k = \overline{1,4}$, при $\lambda > 0$. Следовательно, имеет место (2.3) при $\lambda > 0$.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (0,+\infty)$. Если для этих значений λ не выполняется (2.3), то функции $\varphi_3(x,\lambda)$ и $\varphi_4(x,\lambda)$ являются решениями задачи (0.1)–(0.2). Определим функцию $v(x,\lambda)$:

$$v(x,\lambda) = \varphi_4(l,\lambda)\varphi_3(x,\lambda) - \varphi_3(l,\lambda)\varphi_4(x,\lambda).$$

Так как $v(l,\lambda) = 0$, то функция $v(x,\lambda)$ является собственной функцией задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $\gamma = \pi/2$, $\delta = 0$, соответствующей собственному значению $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (0,+\infty)$. Полученное противоречие доказывает справедливость (2.3). Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Из доказательства теоремы 2.1 видно, что, не нарушая общности, решение $y(x,\lambda)$ задачи (0.1)–(0.2) для каждого фиксированного $x \in [0,l]$ можно считать целой функцией от λ вида

$$y(x,\lambda) = \varphi_4''(l,\lambda)\varphi_3(x,\lambda) - \varphi_3''(l,\lambda)\varphi_4(x,\lambda).$$

Действительно, так как функции $\varphi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$, и их производные для каждого фиксированного $x \in [0,l]$ являются целыми функциями от λ (см. [14; гл. I, § 2, п. 1]), то $y(x,\lambda)$ для каждого фиксированного $x \in [0,l]$ также является целой функцией от λ.

Теорема 2.2. *Пусть $y(x,\lambda)$ – нетривиальное решение задачи* (0.1)–(0.2) *при $\lambda \leqslant 0$. Тогда якобиан $J[y] = r^3 \sin\psi \cos\psi$ преобразования* (1.1) *отличен от нуля при $x \in (0,l)$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы 2.2 неверно. Пусть $x_1 \in (0,l)$ – ближайшая к нулю точка, в которой $\sin\psi(x_1,\lambda)\cos\psi(x_1,\lambda)=0$, откуда следует, что хотя бы один из указанных сомножителей равен нулю. В случае $\sin\psi(x_1,\lambda) = 0$ и $\lambda < 0$ имеем $y(x_1,\lambda) = Ty(x_1,\lambda) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что функция $y(x,\lambda) > 0$ при $x \in (0,x_1)$. Так как $y(0,\lambda) = 0$, то существует точка $\xi_0 \in (0,x_1)$ такая, что $y'(\xi_0,\lambda) = 0$. Из (0.1) получаем, что $(Ty(x,\lambda))' < 0$ при $x \in (0,x_1)$ и, следовательно, $Ty(x,\lambda) > 0$ при $x \in (0,x_1)$. Определим угол $\delta_0 \in (0,\pi/2)$ из равенства $\delta_0 = \operatorname{arctg}(y(\xi_0,\lambda)/Ty(\xi_0,\lambda))$. Тогда функция $y(x,\lambda)$ является решением задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $l = \xi_0$, $\gamma = 0$, $\delta = \delta_0$, что в силу теоремы 1.4 противоречит условию $\lambda < 0$.

В случае $\sin\psi(x_1,0) = 0$ в силу (0.1) имеем $Ty(x,0) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Умножая это тождество на функцию $y(x,0)$ и интегрируя от 0 до l, а также учитывая краевые условия (0.2), получаем

$$\int_0^l [{y''}^2(x,0) + q{y'}^2(x,0)]\,dx = 0. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что $y'(x,0) \equiv 0$, $x \in [0,l]$. Следовательно, $y(x,0) \equiv 0$, $x \in [0,l]$, что противоречит нетривиальности решения.

В случае $\cos\psi(x_1,\lambda) = 0$, $\lambda < 0$, имеем $y'(x_1,\lambda) = y''(x_1,\lambda) = 0$, причем $Ty(x_1,\lambda) \neq 0$. Действительно, если $Ty(x_1,\lambda) = 0$, то $y(x,\lambda)$ является собственной функцией задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $l = x_1$, $\gamma = \pi/2$, $\delta = \pi/2$, что противоречит условию $\lambda < 0$. С учетом выражения $Ty(x,\lambda) = y'''(x,\lambda) - qy'(x,\lambda)$ имеем $y'''(x_1,\lambda) \neq 0$. Так как $y'(0,\lambda) = 0$, то существует ближайщая к x_1 точка $\eta_0 \in (0,x_1)$ такая, что $y'''(\eta_0,\lambda) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $y'(x,\lambda) > 0$, $y''(x,\lambda) < 0$ при $x \in [\eta_0,x_1)$; тогда $y'''(x_1,\lambda) > 0$. При этом имеем

$$\begin{aligned}
&Ty(\eta_0,\lambda) = y'''(\eta_0,\lambda) - q(\eta_0)y'(\eta_0,\lambda) = -q(\eta_0)y'(\eta_0,\lambda) < 0,\\
&Ty(x_1,\lambda) = y'''(x_1,\lambda) - q(x_1)y'(x_1,\lambda) = y'''(x_1,\lambda) > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, существует точка $\mu_0 \in (\eta_0,x_1)$ такая, что $Ty(\mu_0,\lambda) = 0$. Определим угол $\gamma_0 \in (0,\pi/2)$ из равенства $\gamma_0 = -\operatorname{arctg}(y''(\mu_0,\lambda)/y'(\mu_0,\lambda))$. Тогда функция $y(x,\lambda)$ является решением задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $l = \mu_0$, $\gamma = \gamma_0$, $\delta = \pi/2$, что противоречит условию $\lambda < 0$.

В случае $\cos\psi(x_1,0) = 0$ в силу (0.1) имеем $Ty(x,0) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, так как в противном случае, т.е. если $Ty(x,0) \equiv 0$, приходим к противоречию (см. случай $\sin\psi(x_1,0) = 0$). Далее, повторяя вышеприведенные рассуждения, имеем $Ty(\eta_0,0) < 0$, $Ty(x_1,0) > 0$, что противоречит равенству $Ty(x,0) \equiv \mathrm{const}$.

Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.2. Не нарущая общности, функцию ψ можно выбрать таким образом, чтобы $\psi(x,\lambda) \in (0,\pi/2)$ либо $\psi(x,\lambda) \in (\pi/2,\pi)$ при $x \in (0,l)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

§ 3. Основные свойства решения задачи (0.1)–(0.2)

Пусть $y(x,\lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) и $\theta(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$ – соответствующие функции из (1.1). Не нарущая общности, начальные значения этих функций можно определить следующим образом:

$$\theta(0,\lambda) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\sin\psi(0,\lambda), \qquad \varphi(0,\lambda) = 0. \tag{3.1}$$

Действительно, если $\lambda > 0$, то в силу [13; теорема 3.2] имеем $\sin\psi(0,\lambda) \neq 0$. При этом справедливость (3.1) следует из теоремы 1.2. Если $\psi(0,\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$, то на основании (1.1) и (0.2) имеем $y(0,\lambda) = y'(0,\lambda) = Ty(0,\lambda) = 0$, откуда следует, что $y''(0,\lambda) \neq 0$. Тогда в силу (1.1) имеем

$$\operatorname{tg}\theta(0,\lambda) = \lim_{x\to 0}\frac{Ty(x,\lambda)}{y(x,\lambda)} = \lim_{x\to 0}\frac{\lambda y(x,\lambda)}{y'(x,\lambda)} = \lambda\lim_{x\to 0}\frac{y'(x,\lambda)}{y''(x,\lambda)} = 0.$$

Заметим, что $\sin\psi(0,\lambda) \neq 0$ при $\lambda = 0$ (см. доказательство теоремы 2.2). В случае $\sin\psi(0,\lambda) \neq 0$, $\lambda \leqslant 0$, доказательство (3.1) проводится по схеме доказательства теоремы 3.3 из [13].

Пусть $\psi(0,\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$. Используя (1.1), с помощью трехкратного применения правила Лопиталя находим

$$\lim_{x\to 0} w(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda)\sin\varphi(x,\lambda) = \lim_{x\to 0}\frac{y'(x,\lambda)Ty(x,\lambda)}{y^2(x,\lambda)}\cos^2\theta(x,\lambda) = \frac{2\lambda}{3}\,.$$

Учитывая это соотношение, из (1.3c) получаем

$$\lim_{x\to 0}\theta'(x,\lambda) = \frac{\lambda}{3}. \tag{1.3c$'$}$$

Очевидно, что собственные значения $\mu_n = \lambda_n(\pi/2,0)$ и $\nu_n = \lambda_n(\pi/2,\pi/2)$, $n\in\mathbb{N}$, краевой задачи (0.1), (0.2$'$), (0.3$'$) при $\gamma = \pi/2$, $\delta = 0$ и $\gamma = \pi/2$, $\delta = \pi/2$ являются нулями целых функций $y(l,\lambda)$ и $Ty(l,\lambda)$ соответственно. Заметим, что функция $Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda)$ определена для значений $\lambda \in D = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu_{n-1},\mu_n)$, где $\mu_0 = -\infty$.

Лемма 3.1. *Функция $Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda)$ в каждом интервале (μ_{n-1},μ_n), $n\in\mathbb{N}$, является строго возрастающей функцией λ.*

Доказательство. В силу (0.1) имеем

$$(Ty(x,\mu))'y(x,\lambda) - (Ty(x,\lambda))'y(x,\mu) = (\mu-\lambda)y(x,\mu)y(x,\lambda).$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до l (используя формулу интегрирования по частям) и учитывая (0.2), получаем

$$y(l,\lambda)Ty(l,\mu) - y(l,\mu)Ty(l,\lambda) = (\mu-\lambda)\int_0^l y(x,\mu)y(x,\lambda)\,dx. \tag{3.2}$$

При $\lambda,\mu \in (\mu_{n-1},\mu_n)$, $n = 1,2,\dots$, $\lambda \neq \mu$, имеем

$$\frac{Ty(l,\mu)}{y(l,\mu)} - \frac{Ty(l,\lambda)}{y(l,\lambda)} = (\mu-\lambda)\frac{1}{y(l,\mu)y(l,\lambda)}\int_0^l y(x,\mu)y(x,\lambda)\,dx. \tag{3.3}$$

Делением обеих частей (3.3) на $\mu-\lambda$ и последующим предельным переходом при $\mu \to \lambda$ получим

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{Ty(l,\lambda)}{y(l,\lambda)}\right) = \frac{1}{y^2(l,\lambda)}\int_0^l y^2(x,\lambda)\,dx > 0.$$

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{Ty(l,\lambda)}{y(l,\lambda)} = -\infty. \tag{3.4}$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\int_0^l y^2(x,\lambda)\,dx = 1.$$

Как доказано в [15; гл. IV, § 2, п. 5, неравенство (20)], имеет место неравенство

$$y^2(l,\lambda) \leqslant c_0\sqrt{\int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx} + c_1, \tag{3.5}$$

где c_0 и c_1 – положительные постоянные, зависящие только от функции $q(x)$.

Умножая обе части (0.1) на функцию $y(x,\lambda)$ и интегрируя полученное равенство по x в пределах от 0 до l, получаем

$$y(l,\lambda)Ty(l,\lambda) + \int_0^l {y''}^2(x,\lambda)\,dx + \int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx = \lambda. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что

$$\lim_{\lambda\to-\infty} y(l,\lambda)Ty(l,\lambda) = -\infty. \tag{3.7}$$

В силу леммы 3.1 отношение $Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda)$ имеет конечный или бесконечный предел при $\lambda\to-\infty$. Предположим, что

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{Ty(l,\lambda)}{y(l,\lambda)} = -a_0, \tag{3.8}$$

где a_0 – некоторая постоянная. Из леммы 3.1 и равенства (3.7) следует, что $0 < a_0 < \infty$. Учитывая (3.8), из (3.7) получаем $\lim_{\lambda\to-\infty} y^2(l,\lambda) = +\infty$. Следовательно, в силу (3.5) имеем

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx = +\infty. \tag{3.9}$$

На основании леммы 3.1 и равенства (3.8) при достаточно больших по модулю отрицательных значениях λ справедливо неравенство $|Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda)| \leqslant a_0$.

Отсюда с учетом (3.9) и (3.6) при тех же значениях λ получим

$$\begin{aligned}\lambda &\geqslant \int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx - |y(l,\lambda)Ty(l,\lambda)| \geqslant \int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx - a_0 y^2(l,\lambda)\\ &\geqslant \int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx - a_0 c_0\sqrt{\int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx} - a_0 c_1\\ &\geqslant \sqrt{\int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx}\left(\sqrt{\int_0^l q(x){y'}^2(x,\lambda)\,dx} - a_0 c_0\right) - a_0 c_1,\end{aligned}$$

что противоречит (3.9). Лемма 3.2 доказана.

Замечание 3.1. Из теоремы 1.4 и лемм 3.1, 3.2 следует, что если $\lambda \leqslant 0$, то $Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda) < 0$.

Лемма 3.3. *Если $\lambda \leqslant 0$, то $\theta(l,\lambda) \in (-\pi/2, 0)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$. Из (0.1) следует, что $Ty(x,0) \equiv \text{const}$, $x \in [0,l]$. В силу замечания 3.1 $y(l,0)Ty(l,0) < 0$ и, следовательно, $Ty(x,0) \equiv \text{const} \neq 0$, $x \in [0,l]$. Таким образом, $\theta(x,0) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, при $x \in [0,l]$. В силу (1.1) справедливо равенство

$$\operatorname{sgn}(y(l,0)Ty(l,0)) = \operatorname{sgn}\bigl(\sin\theta(l,0)\cos\theta(l,0)\bigr),$$

откуда следует, что

$$\theta(l,0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right). \tag{3.10}$$

Пусть $\lambda < 0$. В силу (1.3c) функция $\theta(x,\lambda)$, строго убывая, принимает значения $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда на основании (3.1), (1.3c) и (1.3c$'$) имеем

$$\theta(x,\lambda) < 0, \qquad x \in (0,l). \tag{3.11}$$

Пусть $\theta(l,\lambda) \in [-(m_0+1)\pi, -m_0\pi]$, где $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $y(l,\lambda)Ty(l,\lambda) < 0$, то, учитывая (3.11), имеем

$$\theta(l,\lambda) \in \left(-m_0\pi - \frac{\pi}{2}, -m_0\pi\right). \tag{3.12}$$

Если $m_0 = 0$, то $\theta(l,\lambda) \in (-\pi/2, 0)$. Предположим, что $m_0 \geqslant 1$. Так как $\theta(l,\lambda)$ является непрерывной функцией $\lambda \in (-\infty,+\infty)$, то в силу (3.10) и (3.12) существует точка $\lambda_0 \in (\lambda, 0)$ такая, что $\theta(l,\lambda_0) \in (-\pi, -\pi/2)$. В силу (1.1) имеем $y(l,\lambda_0)Ty(l,\lambda_0) > 0$, что противоречит замечанию 3.1. Следовательно, в рассматриваемом случае $\theta(l,\lambda) \in (-\pi/2, 0)$. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Если $\lambda \leqslant 0$, то $y(x,\lambda) \neq 0$ при $x \in (0,l)$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, и пусть x_1 – ближайшая к нулю точка из $(0,l)$, в которой $y(x_1,\lambda)=0$.

Рассмотрим случай $\lambda<0$. Пусть $\sin\psi(0,\lambda)\neq 0$. Так как функция $\theta(x,\lambda)$, строго убывая, принимает значение $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, то в силу леммы 3.3 имеет место неравенство

$$-\frac{\pi}{2}<\theta(x,\lambda)<0,\qquad x\in(0,x_1), \tag{3.13}$$

либо неравенство

$$-\pi<\theta(x,\lambda)<-\frac{\pi}{2},\qquad x\in(0,x_1). \tag{3.14}$$

В случае (3.13) в силу теоремы 2.2 из (1.1) следует, что $\theta(x_1,\lambda)=-\pi/2$. Если $y'(x_1,\lambda)=0$, то функция $y(x,\lambda)$ является решением краевой задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $l=x_1$, $\gamma=\delta=0$, что в силу теоремы 1.4 противоречит условию $\lambda<0$. Следовательно, $y'(x_1,\lambda)\neq 0$. Отсюда и из (1.1) имеем $\sin\varphi(x_1,\lambda)\neq 0$. Тогда в силу теоремы 2.2 из (1.3c) следует, что $\theta'(x_1,\lambda)\neq 0$, а так как $\theta(x_1,\lambda)=-\pi/2$, то $\theta'(x_1,\lambda)<0$. Далее, в силу леммы 3.3 существует точка $x_2\in(x_1,l)$, ближайшая к x_1, такая, что $\theta(x_2,\lambda)=-\pi/2$. Таким образом, $y(x_1,\lambda)=y(x_2,\lambda)=0$. Тогда $y'(\xi,\lambda)=0$ в некоторой точке $\xi\in(x_1,x_2)$. Заметим, что $\theta(x,\lambda)\in(-\pi,-\pi/2)$ при $x\in(x_1,x_2)$. Отсюда и из (1.1) имеем

$$y(x,\lambda)Ty(x,\lambda)=r^2(x,\lambda)\sin^2\psi(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda)>0, \tag{3.15}$$

где $0<x_1<x<x_2<l$. Определим угол δ_1 из равенства

$$\delta_1=\operatorname{arctg}\frac{y(\xi,\lambda)}{Ty(\xi,\lambda)}\,;$$

в силу (3.15) $\delta_1\in(0,\pi/2)$. Тогда функция $y(x,\lambda)$ является нетривиальным решением краевой задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $l=\xi$, $\gamma=0$, $\delta=\delta_1$, что в силу теоремы 1.4 противоречит условию $\lambda<0$.

Пусть имеет место (3.14). Поскольку $y(0,\lambda)=y(x_1,\lambda)=0$, то в некоторой точке $\xi\in(0,x_1)$ имеет место равенство $y'(\xi,\lambda)=0$. Кроме того, соотношение (3.15) будет удовлетворяться при $x\in(0,x_1)$. Доказательство утверждения $y(x,\lambda)\neq 0$, $0<x<l$, проводится точно так же, как и в предыдушем случае.

Случай $\sin\psi(0,\lambda)=0$ рассматривается аналогичным образом.

Пусть теперь $\lambda=0$. Тогда справедливы соотношения $\theta(0,0)=-\pi/2$, $\theta(l,0)\in(-\pi/2,0)$, $Ty(x,0)\equiv c_0\neq 0$, $0\leqslant x\leqslant l$, $\theta(x,0)\in(-\pi,0)$, $x\in(0,l)$. Доказательство в этом случае проводится точно так же, как и выше. Доказательство леммы 3.4 завершено.

Обозначим через $m(\lambda)$ количество нулей функции $y(x,\lambda)$ в интервале $(0,l)$.

Теорема 3.1. *Если* $\lambda\in(\mu_{n-1},\mu_n)$, $n\in\mathbb{N}$, *то* $m(\lambda)=n-1$.

Доказательство. При $\lambda\leqslant 0$ из леммы 3.4 следует, что $m(\lambda)=0$.

Пусть $\lambda>0$ и $\theta(x,\lambda)$ – соответствующая функция из преобразования (1.1). В силу (3.1) имеет место равенство $\theta(0,\lambda)=-\pi/2$. На основании (1.4) имеем $\theta(l,\mu_n)=(2n-1)\pi/2$. Известно (см. [13; § 5, теоремы 5.1 и 5.2]), что если

$\lambda > 0$, то функция $\theta(x,\lambda)$, строго возрастая, принимает значения $k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Из этих рассуждений и теоремы 1.3 следует, что $\theta(x,\lambda) \in (-\pi/2, \pi/2)$ при $\lambda \in (0, \mu_1)$, $\theta(x,\lambda) \in (-\pi/2, (2n-1)\pi/2)$ при $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \geqslant 2$. Отсюда получаем справедливость утверждения теоремы 3.1 при $\lambda > 0$. Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Основные свойства собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3)

Лемма 4.1. *Собственные значения краевой задачи* (0.1)–(0.3) *вещественны.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что собственными значениями задачи (0.1)–(0.3) являются корни уравнения

$$(a\lambda + b)y(l,\lambda) - (c\lambda + d)Ty(l,\lambda) = 0. \tag{4.1}$$

Если λ – невещественное собственное значение задачи (0.1)–(0.3), то $\overline{\lambda}$ также будет собственным значением этой задачи, поскольку коэффициенты $q(x)$, a, b, c, d вещественны. При этом $y(x,\overline{\lambda}) = \overline{y(x,\lambda)}$, так что если соотношение (4.1) имеет место для λ, то оно также будет справедливым и для $\overline{\lambda}$.

Полагая $\mu = \overline{\lambda}$ в (3.2), получаем

$$\overline{Ty(l,\lambda)}y(l,\lambda) - Ty(l,\lambda)\overline{y(l,\lambda)} = (\overline{\lambda} - \lambda)\int_0^l |y(x,\lambda)|^2\,dx. \tag{4.2}$$

Условие (0.3) перепишем в виде

$$Ty(l,\lambda) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}\,y(l,\lambda).$$

Учитывая это соотношение, в силу (4.2) имеем

$$\frac{(\overline{\lambda} - \lambda)(ad - bc)}{|c\lambda + d|^2}\,|y(l,\lambda)|^2 = (\overline{\lambda} - \lambda)\int_0^l |y(x,\lambda)|^2\,dx.$$

Поскольку $\overline{\lambda} \neq \lambda$, то отсюда следует равенство

$$\frac{-\sigma}{|c\lambda + d|^2}\,|y(l,\lambda)|^2 = \int_0^l |y(x,\lambda)|^2\,dx.$$

Последнее равенство противоречит условиям $\sigma > 0$, $\displaystyle\int_0^l |y(x,\lambda)|^2\,dx > 0$. Следовательно, λ должно быть вещественным. Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Собственные значения краевой задачи* (0.1)–(0.3) *образуют не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки. Все собственные значения краевой задачи* (0.1)–(0.3) *простые.*

Доказательство. Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) являются нулями целой функции, стоящей в левой части уравнения (4.1). Эта функция, как показано выше, не обращается в нуль при невещественных λ. Следовательно, она не равна нулю тождественно. Поэтому ее нули образуют не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки.

Докажем, что уравнение (4.1) имеет только простые корни. Действительно, если $\lambda = \lambda^*$ является кратным корнем уравнения (4.1), то имеют место равенства

$$(a\lambda^* + b)y(l, \lambda^*) - (c\lambda^* + d)Ty(l, \lambda^*) = 0, \tag{4.3}$$

$$ay(l, \lambda^*) + (a\lambda^* + b)\frac{\partial}{\partial\lambda}\, y(l, \lambda^*) - cTy(l, \lambda^*) - (c\lambda^* + d)\frac{\partial}{\partial\lambda}\, Ty(l, \lambda^*) = 0. \tag{4.4}$$

Делением обеих частей (3.2) на $\mu - \lambda$ ($\mu \neq \lambda$) и последующим предельным переходом (при $\mu \to \lambda$) получим

$$y(l, \lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\, Ty(l, \lambda) - Ty(l, \lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\, y(l, \lambda) = \int_0^l y^2(x, \lambda)\, dx. \tag{4.5}$$

Положим $\lambda = \lambda^*$ в равенстве (4.5), тогда

$$y(l, \lambda^*)\frac{\partial}{\partial\lambda}\, Ty(l, \lambda^*) - Ty(l, \lambda^*)\frac{\partial}{\partial\lambda}\, y(l, \lambda^*) = \int_0^l y^2(x, \lambda^*)\, dx. \tag{4.6}$$

Поскольку $\sigma \neq 0$, то $(a\lambda^* + b)^2 + (c\lambda^* + d)^2 \neq 0$. Допустим, что $c\lambda^* + d \neq 0$. Тогда из (4.3) и (4.4) соответственно следует

$$Ty(l, \lambda^*) = \frac{a\lambda^* + b}{c\lambda^* + d}\, y(l, \lambda^*),$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\, Ty(l, \lambda^*) = \frac{a\lambda^* + b}{c\lambda^* + d}\, \frac{\partial}{\partial\lambda}\, y(l, \lambda^*) - \frac{\sigma}{(c\lambda^* + d)}\, y(l, \lambda^*).$$

Используя последние два равенства и (4.6), получаем

$$-\frac{\sigma}{(c\lambda^* + d)^2}\, y^2(l, \lambda^*) = \int_0^l y^2(x, \lambda^*)\, dx,$$

что невозможно в силу условия (0.4).

Случай $a\lambda^* + b \neq 0$ рассматривается аналогично. Лемма 4.2 доказана.

§ 5. Осцилляционные свойства собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

При $c \neq 0$ определим число N из неравенства $\mu_{N-1} < -d/c \leqslant \mu_N$.

Теорема 5.1. *Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ краевой задачи* (0.1)–(0.3). *Соответствующие им собственные функции обладают следующими осцилляционными свойствами*:

(a) *если* $c = 0$, *то собственная функция* $y_n(x)$, *соответствующая собственному значению* λ_n, *имеет ровно* $n-1$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$;

(b) *если* $c \neq 0$, *то собственная функция* $y_n(x)$, *соответствующая собственному значению* λ_n, *при* $n \leqslant N$ *имеет ровно* $n-1$ *простых нулей, а при* $n > N$ *– ровно* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$.

Доказательство. В силу леммы 3.1 $\Phi(\lambda) = Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda)$ является непрерывной строго возрастающей функцией в интервале (μ_{n-1},μ_n), $n \in \mathbb{N}$. Учитывая также равенства $y(l,\mu_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\lim_{\lambda\to\mu_{n-1}+0}\Phi(\lambda) = -\infty, \qquad \lim_{\lambda\to\mu_n-0}\Phi(\lambda) = +\infty.$$

Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ каждое значение из $(-\infty,+\infty)$ принимает только в единственной точке интервала (μ_{n-1},μ_n), $n \in \mathbb{N}$. Для функции $F(\lambda) = (a\lambda+b)/(c\lambda+d)$ имеем $F'(\lambda) = -\sigma/(c\lambda+d)^2$. Так как $\sigma > 0$, то при $c = 0$ функция $F(\lambda)$ строго убывает в интервале $(-\infty,+\infty)$; при $c \neq 0$ функция $F(\lambda)$ строго убывает в каждом из интервалов $(-\infty,-d/c)$ и $(-d/c,+\infty)$, при этом

$$\lim_{\lambda\to-d/c-0}F(\lambda) = -\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-d/c+0}F(\lambda) = +\infty.$$

Пусть либо $c = 0$, либо $c \neq 0$ и $-d/c \notin (\mu_{n-1},\mu_n]$. Из вышеизложенного следует, что в интервале (μ_{n-1},μ_n) найдется единственное значение $\lambda = \lambda_n^*$, для которого

$$\Phi(\lambda) = F(\lambda), \tag{5.1}$$

т.е. выполняется (0.3). Следовательно, λ_n^* есть собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3) и $y(x,\lambda_n^*)$ – соответствующая собственная функция. Из теоремы 3.1 следует, что $m(\lambda_n^*) = n-1$. Нетрудно заметить, что если $c = 0$ или $c \neq 0$, $n < N$, то λ_n^* является n-м собственным значением краевой задачи (0.1)–(0.3). Отсюда получаем справедливость утверждения (a) и справедливость части утверждения (b), относящейся к случаю $n < N$.

Пусть $c \neq 0$ и $-d/c \in (\mu_{N-1},\mu_N)$. Аналогичным образом убеждаемся в том, что в каждом из интервалов $(\mu_{N-1},-d/c)$ и $(-d/c,\mu_N)$ найдется единственное значение (соответственно λ_N и λ_{N+1}), для которого выполняется (5.1). В силу теоремы 3.1 имеем $m(\lambda_N) = m(\lambda_{N+1}) = N-1$.

Случай $c \neq 0$ и $-d/c = \mu_N$ рассматривается совершенно аналогично, при этом используется тот факт, что μ_N также является собственным значением краевой задачи (0.1)–(0.3). В этом случае $\lambda_N \in (\mu_{N-1},\mu_N)$, $\lambda_{N+1} = \mu_N$. На основании теоремы 3.1 имеем $m(\lambda_N) = m(\lambda_{N+1}) = N-1$.

Заметим, что при $c \neq 0$ и $n > N$ единственное решение λ_n^* уравнения (5.1) в полуинтервале $(\mu_{n-1},\mu_n]$ является $(n+1)$-м собственным значением краевой задачи (0.1)–(0.3), т.е. $\lambda_n^* = \lambda_{n+1}$. Так как $m(\lambda_n^*) = n-1$, то $m(\lambda_{n+1}) = n-1 = (n+1)-2$. Таким образом, получаем справедливость утверждения (b).

Теорема 5.1 доказана.

Лемма 5.1. *Для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения*

$$\mu_{n-2} < \nu_{n-1} < \lambda_n < \mu_{n-1}, \qquad \text{если} \quad c \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} \geqslant 0, \tag{5.2}$$

$$\mu_{n-2} < \lambda_n < \nu_{n-1} < \mu_{n-1}, \qquad \text{если} \quad c \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} < 0, \tag{5.3}$$

$$\mu_{n-1} < \lambda_n < \nu_n < \mu_n, \qquad \text{если} \quad c = 0. \tag{5.4}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что собственными значениями краевой задачи (0.1), (0.2), (0.3$'$) при $\delta = \pi/2$ являются корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$. Совершенно аналогичным образом доказывается (см. доказательство теоремы 5.1), что это уравнение в каждом интервале (μ_{n-1}, μ_n), $n \in \mathbb{N}$, имеет единственное решение $\nu_n = \lambda_n(\pi/2, \pi/2)$. Следовательно, имеем

$$\mu_{n-1} < \nu_n < \mu_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

При достаточно больших λ справедливы неравенства

$$\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} < 0, \quad \text{если} \quad \frac{a}{c} < 0, \qquad \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} > 0, \quad \text{если} \quad \frac{a}{c} \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$\frac{Ty(l,\lambda)}{y(l,\lambda)} < 0, \qquad \text{если} \quad \mu_{n-1} < \lambda < \nu_{n-1},$$
$$\frac{Ty(l,\lambda)}{y(l,\lambda)} > 0, \qquad \text{если} \quad \nu_n < \lambda < \mu_n.$$

Справедливость соотношений (5.2) и (5.3) следует из последних четырех неравенств.

Неравенство (5.4) доказывается аналогичным образом.

§ 6. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

Теорема 6.1. *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sqrt[4]{\lambda_n} = \begin{cases} \left(n - \dfrac{3}{4}\right)\dfrac{\pi}{l} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & \text{если} \ \ c = 0, \\ \left(n - \dfrac{3}{2}\right)\dfrac{\pi}{l} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & \text{если} \ \ c \neq 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\sqrt[4]{\mu_n} = \left(n + \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.2}$$

$$\sqrt[4]{\nu_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.3}$$

$$y_n(x) = \begin{cases} \sin\left(n-\dfrac{3}{4}\right)\dfrac{\pi}{l}x - \cos\left(n-\dfrac{3}{4}\right)\dfrac{\pi}{l}x \\ \qquad + e^{-(n-3/4)\pi x/l} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad \text{если} \ \ c=0, \\ \sin\left(n-\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{\pi}{l}x - \cos\left(n-\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{\pi}{l}x + (-1)^n e^{(n-3/2)\pi(x-l)/l} \\ \qquad + e^{-(n-3/2)\pi x/l} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad \text{если} \ \ c\neq 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$v_n^{(\pi/2,0)}(x) = \sin\left(n+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l}x - \cos\left(n+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + e^{-(n+1/4)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} v_n^{(\pi/2,\pi/2)}(x) = {} & \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x \\ & + (-1)^{n+1}e^{(n-1/2)\pi(x-l)/l} + e^{-(n-1/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \tag{6.6}$$

причем соотношения (6.4)–(6.6) *выполняются равномерно по* $x \in [0, l]$.

Доказательство. В уравнении (0.1) положим $\lambda = \rho^4$. Известно (см. [14; гл. II, § 4, п. 5, теорема 1]), что во всякой области T комплексной ρ-плоскости уравнение (0.1) имеет четыре линейно независимых решения $z_k(x,\rho)$, $k=\overline{1,4}$, регулярных относительно ρ (при достаточно большом ρ) и удовлетворяющих соотношениям

$$z_k^{(s)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^s e^{\rho\omega_k x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \qquad k=\overline{1,4}, \quad s=\overline{0,3}, \tag{6.7}$$

где ω_k, $k=\overline{1,4}$, – различные корни четвертой степени из 1.

Обозначим

$$\rho_n = \sqrt[4]{\lambda_n}, \qquad \tau_n = \sqrt[4]{\mu_n}, \qquad \chi_n = \sqrt[4]{\nu_n}.$$

Краевые условия (0.2′), (0.3′) при $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$ являются усиленно регулярными (см. [14; гл. II, § 4, п. 8]). Известно (см. [14; гл. II, § 4, п. 9, формулы (45.а) и (45.б)]), что для достаточно больших номеров k справедливы формулы

$$\tau_{k+m_0} = \left(k+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \tag{6.8}$$

$$\chi_{k+m_1} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \tag{6.9}$$

где m_0 и m_1 – некоторые фиксированные целые числа. Из (6.8), (6.9) и (5.5) следует, что $m_0 = m_1 - 1$.

Используя соотношение (6.7) и принимая во внимание краевые условия (0.2)–(0.3), для достаточно больших номеров k получаем

$$\rho_{k+m_2} = \left(k+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \text{при} \ \ c=0, \tag{6.10}$$

$$\rho_{k+m_3} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \text{при} \ \ c\neq 0, \tag{6.11}$$

где m_2 и m_3 – некоторые фиксированные целые числа. Из (5.2)–(5.4) и (6.8)–(6.11) следует, что $m_2 = m_1$ и $m_3 = m_1 + 1$.

Таким образом, мы показали, что для достаточно больших номеров k имеют место формулы

$$\tau_{k+m_1-1} = \left(k+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \tag{6.12}$$

$$\rho_{k+m_1+1} = \begin{cases} \left(k+\dfrac{5}{4}\right)\dfrac{\pi}{l} + O\left(\dfrac{1}{k}\right) & \text{при } c=0, \\ \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{l} + O\left(\dfrac{1}{k}\right) & \text{при } c\neq 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Далее, принимая во внимание (6.7), (6.9), (6.12), (6.13), получаем следующие асимптотические формулы (см. [14; гл. II, § 4, п. 10]):

$$y_{k+m_1+1}(x) = \begin{cases} \sin\left(k+\dfrac{5}{4}\right)\dfrac{\pi x}{l} - \cos\left(k+\dfrac{5}{4}\right)\dfrac{\pi x}{l} \\ \qquad + e^{-(k+5/4)\pi x/l} + O\left(\dfrac{1}{k}\right) \qquad \text{при } c=0, \\ \sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{l} - \cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{l} + (-1)^k e^{(k+1/2)\pi(x-l)/l} \\ \qquad + e^{-(k+1/2)\pi x/l} + O\left(\dfrac{1}{k}\right) \qquad \text{при } c\neq 0, \end{cases} \tag{6.14}$$

$$v^{(\pi/2,0)}_{k+m_1-1}(x) = \sin\left(k+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi x}{l} - \cos\left(k+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi x}{l} + e^{-(k+1/4)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned} (v^{(\pi/2,\pi/2)}_{k+m_1}(x))^{(s)} = \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right)^s \biggl\{ & \sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} + \frac{\pi}{2}\,s\right] \\ & - \cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} + \frac{\pi}{2}\,s\right] + (-1)^k e^{(k+1/2)\pi(x-l)/l} \\ & + (-1)^s e^{-(k+1/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{k}\right)\biggr\}, \qquad s=\overline{0,3}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Для завершения доказательства теоремы найдем значение m_1. Пусть $k=2m$, где m – достаточно большое фиксированное целое число. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} v^{(\pi/2,\pi/2)}_{2m+m_1}(x) = {} & \sin\left(2m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} - \cos\left(2m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} \\ & + e^{(2m+1/2)\pi(x-l)/l} + e^{-(2m+1/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta = \left(2m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\,, \qquad x\in[0,l],$$

тогда

$$x = \frac{\beta l}{(2m+1/2)\pi}, \qquad \beta\in\left[0,\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi\right].$$

Положим

$$g(\beta) = v_{2m+m_1}^{(\pi/2,\pi/2)}\left(\frac{\beta l}{(2m+1/2)\pi}\right), \tag{6.17}$$

тогда

$$g(\beta) = \sin\beta - \cos\beta + e^{\beta-(2m+1/2)\pi} + e^{-\beta} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{6.18}$$

Принимая во внимание (6.16), имеем

$$g'(\beta) = \cos\beta + \sin\beta + e^{\beta-(2m+1/2)\pi} - e^{-\beta} + O\left(\frac{1}{m}\right), \tag{6.19}$$

$$g''(\beta) = -\sin\beta + \cos\beta + e^{\beta-(2m+1/2)\pi} + e^{-\beta} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{6.20}$$

Пусть $\beta \in [2\pi p, 2\pi(p+1)]$, $p = 1, 2, \dots, m-1$. Зафиксируем число p. Положим $\alpha = \beta - 2\pi p$, отсюда $\beta = \alpha + 2p\pi$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Обозначим

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= g(\alpha + 2p\pi) \\ &= \sin\alpha - \cos\alpha + e^{\alpha+2p\pi-(2m+1/2)\pi} + e^{-(\alpha+2p\pi)} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Из (6.21) и (6.19) следует, что

$$f'(\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha + e^{\alpha+2p\pi-(2m+1/2)\pi} - e^{-(\alpha+2p\pi)} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{6.22}$$

Принимая во внимание (6.21) и (6.22), убеждаемся в справедливости следующих соотношений:

$$f(0) < 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, \qquad f(\pi) > 0, \qquad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0, \qquad f(2\pi) < 0,$$
$$f'(\alpha) > 0, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad f(\alpha) > 0, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$
$$f'(\alpha) < 0, \quad \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f(\alpha) < 0, \quad \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

Отсюда следует, что функция $f(\alpha)$ имеет в точности два нуля на отрезке $[0, 2\pi]$ и, следовательно, функция $g(\beta)$ имеет в точности $2m-2$ нулей на отрезке $[2\pi, 2m\pi]$.

Пусть теперь $\beta \in (2m\pi, 2m\pi + \pi/2)$. В силу (6.18) и (6.19) имеем $g(2m\pi) < 0$, $g(2m\pi + \pi/2) > 0$, $g'(\beta) > 0$. Следовательно, функция $g(\beta)$ имеет в точности один нуль в интервале $(2m\pi, 2m\pi + \pi/2)$.

Рассмотрим функцию $g(\beta)$ в интервале $(0, 2\pi)$. Из (6.18) следует справедливость соотношений

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, \qquad g(\pi) > 0, \qquad g\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0, \qquad g(2\pi) < 0,$$
$$g(\beta) > 0, \quad \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad g'(\beta) < 0, \quad \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad g(\beta) < 0, \quad \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

Отсюда следует, что функция $g(\beta)$ имеет в точности один нуль в промежутке $[\pi/2, 2\pi)$. И наконец, рассмотрим функцию $g(\beta)$ в интервале $(0, \pi/2)$. В случае $\beta \in [\pi/4, \pi/2)$ в силу (6.18) имеем

$$g(\beta) = \sqrt{2}\,\sin\!\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + e^{\beta-(2m+1/2)\pi} + e^{-\beta} + O\!\left(\frac{1}{m}\right) > 0.$$

Далее, в силу (0.2) имеем $g(0) = g'(0) = 0$. Из (6.20) следует, что $g''(\beta) > 0$ при $\beta \in [0, \pi/4]$. Следовательно, $g(\beta) > 0$ при $\beta \in (0, \pi/4)$. Таким образом, функция $g(\beta)$ не имеет нулей в интервале $(0, \pi/2)$.

В силу приведенных рассуждений получим, что функция $g(\beta)$ имеет в точности $2m$ нулей в интервале $(0, (2m + 1/2)\pi)$. Следовательно, в силу (6.17) функция $v_{2m+m_1}^{(\pi/2,\pi/2)}(x)$ имеет в точности $2m$ нулей в интервале $(0, l)$. Тогда на основании теоремы 1.4 функция $v_{2m+m_1}^{(\pi/2,\pi/2)}(x)$ соответствует собственному значению ν_{2m+1} краевой задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $\gamma = \delta = \pi/2$. Отсюда следует, что $m_1 = 1$.

Полагая $m_1 = 1$ в формулах (6.9), (6.12)–(6.16), получаем справедливость утверждения теоремы 6.1.

Теорема 6.1 доказана.

§ 7. О минимальности системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

Теорема 7.1. *Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, является минимальной в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать существование системы $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, биортогонально сопряженной к системе $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$.

В силу (3.2) для любых различных натуральных n и k имеем

$$y_k(l)Ty_n(l) - y_n(l)Ty_k(l) = (\lambda_n - \lambda_k)(y_n, y_k), \tag{7.1}$$

где

$$(y_n, y_k) = \int_0^l y_n(x)y_k(x)\,dx.$$

Учитывая (0.3), из (7.1) получаем

$$(y_n, y_k) = -\frac{1}{\sigma}\,m_n m_k, \qquad n, k \in \mathbb{N}, \quad n \neq k, \tag{7.2}$$

где $m_n = a y_n(l) - cTy_n(l)$.

Докажем, что $m_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. При доказательстве теоремы 5.1 была установлена справедливость следующих утверждений:

(i) в случае $c = 0$ $\lambda_n \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$ при $n = 1, 2, \dots;$

(ii) в случае $c \neq 0$ $\lambda_n \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$ при $n = 1, 2, \ldots, N$, $\lambda_{N+1} \in (\mu_{N-1}, \mu_N)$, если $\mu_N \neq -d/c$, $\lambda_{N+1} = \mu_N$, если $\mu_N = -d/c$, $\lambda_n \in (\mu_{n-2}, \mu_{n-1})$ при $n = N+2, N+3, \ldots$, где N – натуральное число, которое определяется из неравенства $\mu_{N-1} < -d/c \leqslant \mu_N$.

Отсюда следует, что в случае $c = 0$ $y_n(l) \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а в случае $c \neq 0$ $y_n(l) \neq 0$ при $n \in \mathbb{N} \setminus \{N+1\}$, $y_{N+1}(l) \neq 0$, если $\mu_N \neq -d/c$, $y_{N+1}(l) = 0$, $Ty_{N+1}(l) \neq 0$, если $\mu_N = -d/c$.

В случае $c = 0$ в силу (0.4) имеем $a \neq 0$, откуда $m_n = ay_n(l) \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим случай $c \neq 0$. В силу условий (0.3) и (0.4) получим

$$m_n = cy_n(l)\left[\frac{a}{c} - \frac{Ty_n(l)}{y_n(l)}\right] = cy_n(l)\left[\frac{a}{c} - \frac{a\lambda_n + b}{c\lambda_n + d}\right] \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{N+1\},$$

$$m_{N+1} = \begin{cases} cy_{N+1}\left[\dfrac{a}{c} - \dfrac{a\lambda_{N+1} + b}{c\lambda_{N+1} + d}\right] \neq 0, & \mu_N \neq -\dfrac{d}{c}\,, \\ cTy_{N+1}(l) \neq 0, & \mu_N = -\dfrac{d}{c}\,. \end{cases}$$

Элементы системы $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $n \neq r$, определим следующим образом:

$$u_n(x) = \frac{1}{\delta_n}\left[y_n(x) - \frac{m_n}{m_r}\, y_r(x)\right], \tag{7.3}$$

где $\delta_n = \|y_n\|_2^2 + m_n^2/\sigma$, $\|\cdot\|_p$ означает норму в пространстве $L_p(0,1)$. На основании (7.2) легко убедиться в справедливости равенства

$$(y_n, y_k) = \delta_{nk},$$

где δ_{nk} – символ Кронекера. Теорема 7.1 доказана.

Лемма 7.1. *Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда при $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$u_n(x) = \frac{1}{l}y_n(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{7.4}$$

где $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $n \neq r$, – система, являющаяся биортогонально сопряженной к системе $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $n \neq r$.

Доказательство. В силу асимптотических формул (6.4) справедливы соотношения

$$\|y_n\|_2^2 = l + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad y_n(l) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{при } c = 0, \\ 2(-1)^n + O\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{при } c \neq 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

На основании (0.3), (6.1) и (7.5) при $n \to \infty$ имеем

$$m_n = -\frac{\sigma}{c\lambda_n + d}\, y_n(l) = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{7.6}$$

Принимая во внимание (7.5) и (7.6), из формулы (7.3) получаем представление (7.4). Лемма 7.1 доказана.

§ 8. Базисность в $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

Теорема 8.1. *Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда система $\{y_n(x)\}$, $n=1,2,\dots$, $n\neq r$, образует базис в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, причем в $L_2(0,l)$ этот базис является безусловным базисом.*

Доказательство. Напомним, что краевые условия (0.2′), (0.3′) при $\gamma,\delta\in[0,\pi/2]$ являются усиленно регулярными. Тогда на основании работы [16] (см. также [17]) система собственных функций $\{v_n^{(\gamma,\delta)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (0.1), (0.2′), (0.3′) при $\gamma,\delta\in[0,\pi/2]$ образует базис в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<+\infty$, причем в $L_2(0,l)$ этот базис является безусловным.

Пусть $c=0$. Сравним систему $\{y_n(x)\}$, $n=1,2,\dots$, $n\neq r$, с системой $\{v_n^{(\pi/2,0)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу (6.4) и (6.5) для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\|y_{n+1}(x)-v_n^{(\pi/2,0)}(x)\|_2\leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{1}{n}\,. \tag{8.1}$$

Из неравенства (8.1) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{r-1}\bigl\|y_n(x)-v_n^{(\pi/2,0)}(x)\bigr\|_2^2+\sum_{n=r}^{+\infty}\bigl\|y_{n+1}(x)-v_n^{(\pi/2,0)}(x)\bigr\|_2^2$$

(при $r=1$ первая сумма отсутствует). Таким образом, система $\{y_n(x)\}$, $n=1,2,\dots$, $n\neq r$, квадратично близка к системе $\{v_n^{(\pi/2,0)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу теоремы 7.1 эта система минимальна в пространстве $L_2(0,l)$. Следовательно, система $\{y_n(x)\}$, $n=1,2,\dots$, $n\neq r$, является безусловным базисом в $L_2(0,l)$ (см. [18; гл. IX, § 9, п. 8]).

Случай $c\neq 0$ рассматривается аналогично. В этом случае система $\{y_n(x)\}$, $n=1,2,\dots$, $n\neq r$, сравнивается с системой $\{v_n^{(\pi/2,\pi/2)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Положим $\widetilde v_n^{(\gamma,\delta)}(x)=v_n^{(\gamma,\delta)}(x)\|v_n^{(\gamma,\delta)}(x)\|_2^{-1}$, $n=1,2,\dots$. Поскольку краевая задача (0.1), (0.2′), (0.3′) при $\gamma,\delta\in[0,\pi/2]$ является самосопряженной, то в силу (6.5) и (6.6) системы $\{\widetilde v_n^{(\pi/2,0)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\widetilde v_n^{(\pi/2,\pi/2)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются равномерно ограниченными ортонормированными базисами пространства $L_2(0,l)$.

Используя (6.4) и (7.4), нетрудно проверить, что при $n\in\mathbb N$, $n\neq r$ справедливы соотношения

$$y_n(x)=l^{1/2}\widetilde v_n(x)+O\biggl(\frac1n\biggr),\qquad u_n(x)=l^{-1/2}\widetilde v_n(x)+O\biggl(\frac1n\biggr), \tag{8.2}$$

где

$$\widetilde v_n(x)=\begin{cases}\widetilde v_n^{(\pi/2,0)}(x) & \text{при}\ \ c=0\ \ \text{и}\ \ 1\leqslant n\leqslant r-1,\\ \widetilde v_{n-1}^{(\pi/2,0)}(x) & \text{при}\ \ c=0\ \ \text{и}\ \ n\geqslant r+1,\\ \widetilde v_n^{(\pi/2,\pi/2)}(x) & \text{при}\ \ c\neq0\ \ \text{и}\ \ 1\leqslant n\leqslant r-1,\\ \widetilde v_{n-1}^{(\pi/2,\pi/2)}(x) & \text{при}\ \ c\neq0\ \ \text{и}\ \ n\geqslant r+1.\end{cases} \tag{8.3}$$

Заметим, что на основании (8.3) система $\{\widetilde v_n(x)\}$, $n=1,2,\dots$, $n\neq r$, образует равномерно ограниченный ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,l)$.

Зафиксируем $p \in (1,2)$. Так как система $\{y_n(x)\}$, $n = 1,2,\dots,\ n \neq r$, является базисом в $L_2(0,l)$, то эта система полна в $L_p(0,l)$. Известно [19; гл. I, § 4, теорема 6], что для базисности в $L_p(0,l)$ системы $\{y_n(x)\}$, $n = 1,2,\dots,\ n \neq r$, необходимо и достаточно существования постоянной $M_p > 0$, обеспечивающей справедливость неравенства

$$\Big\| \sum_{n=1, n\neq r}^{k} (f,u_n)y_n \Big\|_p \leqslant M_p \|f\|_p, \qquad k = 1,2,\dots, \tag{8.4}$$

для произвольной функции $f(x)$ из $L_p(0,l)$.

В силу (8.2) имеем

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} (f,u_n)y_n \Big\|_p &\leqslant \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} (f,\widetilde{v}_n)\widetilde{v}_n \Big\|_p + \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} (f,\widetilde{v}_n)O\Big(\frac{1}{n}\Big) \Big\|_p \\ &+ \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \Big(f, O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\widetilde{v}_n \Big\|_p + \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \Big(f, O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)O\Big(\frac{1}{n}\Big) \Big\|_p. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Поскольку система $\{\widetilde{v}_n(x)\}$, $n = 1,2,\dots,\ n \neq r$, является ортонормированной и образует базис в пространстве $L_p(0,l)$, то опять же в силу теоремы 6 из [19; гл. I, § 4] имеет место неравенство

$$\Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} (f,\widetilde{v}_n)\widetilde{v}_n \Big\|_p \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_p, \tag{8.6}$$

где $f(x)$ – произвольная функция из $L_p(0,l)$.

В силу теоремы Ф. Рисса [20; гл. XII, § 2, теорема 2.8] для произвольной функции $f(x) \in L_p(0,l)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} (f,\widetilde{v}_n)O\Big(\frac{1}{n}\Big) \Big\|_p &\leqslant \mathrm{const} \cdot \Big(\sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} |(f,\widetilde{v}_n)|^q \Big)^{1/q} \Big(\sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \frac{1}{n^p} \Big)^{1/p} \\ &\leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_p, \end{aligned} \tag{8.7}$$

где $q = p/(p-1)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \Big(f, O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\widetilde{v}_n \Big\|_p &\leqslant \mathrm{const} \cdot \Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \Big(f, O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\widetilde{v}_n \Big\|_2 \\ &\leqslant \mathrm{const} \cdot \Big(\sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \Big| \Big(f, O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \Big|^2 \Big)^{1/2} \\ &\leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_1 \Big(\sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \frac{1}{n^2} \Big)^{1/2} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_p, \end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\Big\| \sum_{n=1,\, n\neq r}^{k} \Big(f, O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)O\Big(\frac{1}{n}\Big) \Big\|_p \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_1 \Big(\sum_{n=1,n\neq r}^{k} \frac{1}{n^2} \Big) \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_p. \tag{8.9}$$

Неравенство (8.4) является следствием неравенств (8.5)–(8.9). Таким образом, базисность системы $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots,\ n \neq r$, в пространстве $L_p(0, l)$ при $1 < p < 2$ доказана.

Пусть $2 < p < \infty$. Так как система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots,\ n \neq r$, является базисом в $L_q(0, l)$, то в силу следствия 2 из [19; гл. I, § 4] система $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots,\ n \neq r$, является базисом в пространстве $L_p(0, l)$. Следовательно, система $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots,\ n \neq r$, полна в пространстве $L_q(0, l)$. Далее, с помощью вышеприведенных рассуждений аналогично доказывается базисность в $L_q(0, l)$ системы $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots,\ n \neq r$, что равносильно базисности системы $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots,\ n \neq r$, в $L_p(0, l)$. Теорема 8.1 доказана.

Список литературы

[1] С. В. Мелешко, Ю. В. Покорный, “Об одной вибрационной краевой задаче”, *Дифференц. уравнения*, **23**:8 (1987), 1466–1467.

[2] G. H. Handelman, J. B. Keller, “Small vibrations of a slightly stiff pendulum”, *Proc. 4th U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, vol. 1 (Univ. California, Berkeley, CA, 1962), Amer. Soc. Mech. Engrs., New York, 1962, 195–202.

[3] M. Roseau, *Vibrations in mechanical systems. Analytical methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] C. T. Fulton, “Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions”, *Math. Z.*, **133**:4 (1973), 301–312.

[5] H. J. Ahn, “Vibrations of a pendulum consisting of a bob suspended from a wire”, *Quart. Appl. Math.*, **39**:1 (1981), 109–117.

[6] А. А. Шкаликов, “Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **9** (1983), 190–229.

[7] M. R. Racheva, “Bounds for the principial eigenvalue of a nonhomogenious bar with a tip mass”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **54**:11 (2001), 23–26.

[8] Н. Ю. Капустин, Е. И. Моисеев, “О спектральной задаче из теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности”, *Докл. РАН*, **352**:4 (1997), 451–454.

[9] Н. Ю. Капустин, “Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии”, *Дифференц. уравнения*, **35**:8 (1999), 1024–1027.

[10] Н. Ю. Капустин, Е. И. Моисеев, “О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии”, *Дифференц. уравнения*, **36**:10 (2000), 1357–1360.

[11] Н. Ю. Капустин, Е. И. Моисеев, “Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии”, *Докл. РАН*, **385**:1 (2002), 20–24.

[12] Н. Б. Керимов, В. С. Мирзоев, “О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:5 (2003), 1041–1045.

[13] D. O. Banks, G. J. Kurowski, “A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces”, *J. Differential Equations*, **24**:1 (1977), 57–74.

[14] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Физматлит, М., 1969.

[15] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. I, Гостехиздат, М., Л., 1951.

[16] H. E. Benzinger, “The L^p behavior of eigenfunction expansion”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **174** (1972), 333–344.

[17] А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский, “Эквивалентность в $L_p(0,1)$ системы $e^{i2\pi kx}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ и системы собственных функций обыкновенного функционально-дифференциального оператора”, *Матем. заметки*, **49**:1 (1991), 47–55.

[18] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, ГИФМЛ, М., 1958.

[19] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.

[20] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. II, Мир, М., 1965.

Н. Б. Керимов (N. B. Kerimov)
Институт математики и механики
НАН Азербайджанской Республики, г. Баку
E-mail: nazimkerimov@yahoo.com

Поступила в редакцию
01.11.2005 и 31.05.2006

З. С. Алиев (Z. S. Aliev)
Бакинский государственный университет
E-mail: z_aliyev@mail.ru