УДК 517.984.5
Ч. Г. Ибадзаде (Бакин. гос. ун-т, Азербайджан),
И. М. Набиев (Бакин. гос. ун-т, Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Ун-т Хазар, Азербайджан)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

We study the inverse problem for the Sturm – Liouville operator with nonseparated boundary conditions one of which contains a spectral parameter. The uniqueness theorem is presented and sufficient conditions for the solvability of the inverse problem are obtained.

Роботу присвячено дослідженню оберненої задачі для оператора Штурма – Ліувілля з нерозділеними граничними умовами, одна з яких містить спектральний параметр. Наведено теорему єдиності й отримано достатні умови розв’язності оберненої задачі.

1. Введение. Одно из ведущих направлений исследований в математике связано с обратными задачами спектрального анализа для дифференциальных операторов, в которых требуется восстановить операторы по их некоторым заданным спектральным данным. Такими спектральными данными могут быть один, два и большее число спектров, спектральная функция, спектр и нормировочные числа, функция Вейля, данные рассеяния и т. д. В зависимости от выбора спектральных данных такие задачи различаются своими постановками.

Многие вопросы теории колебаний в математической физике приводят к обратным задачам спектрального анализа для дифференциальных операторов со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях. В случае разделенных граничных условий (т. е. когда граничные условия задаются отдельно в каждом конце рассматриваемого промежутка) некоторые варианты таких задач полностью решены в работах [1 – 10]. Изучены свойства спектральных данных, доказаны теоремы единственности, а также необходимые и достаточные условия разрешимости обратных задач. Важную роль во многих физических и технических приложениях [10 – 12] играют периодические, антипериодические, квазипериодические, обобщенно периодические задачи, вообще, краевые задачи для дифференциального уравнения Штурма – Лиувилля и дифференциального пучка уравнений Штурма – Лиувилля при неразделенных граничных условиях (т. е. когда граничные формы содержат комбинации значений искомой функции на концах отрезка). Вопросы восстановления таких задач с граничными условиями без спектрального параметра подробно исследованы в [13 – 25]. В соответствующих обратных задачах неизвестный коэффициент дифференциального уравнения и параметры граничных условий восстанавливаются либо по спектрам двух или трех краевых задач с различными разделенными и неразделенными граничными условиями, либо по двум спектрам и трем собственным значениям, либо по спектрам двух подобных или неподобных краевых задач, некоторой последовательности знаков и некоторому комплексному числу (краевые задачи называются подобными, если их характеристические функции отличаются на константу). Обратные задачи для операторов с полиномиальным вхождением спектрального параметра в неразделенные граничные условия изучены в [26 – 31]. Отметим, что в этих работах доказана теорема единственности и составлен алгоритм решения, но не установлены условия разрешимости соответствующих обратных задач.

В настоящей работе исследуется обратная спектральная задача восстановления оператора Штурма – Лиувилля с неразделенными граничными условиями, одно из которых содержит спектральный параметр. Приведена теорема единственности и получены достаточные условия разрешимости обратной задачи. В качестве спектральных данных используются спектры двух краевых задач и некоторая последовательность знаков.

2. Спектральные данные краевых задач. Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0,\pi]$ уравнением Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{1}$$

и граничными условиями вида

$$\begin{gathered} y'(0) + (\alpha\lambda+\beta)y(0) + \omega y(\pi) = 0, \\ y'(\pi) + \gamma y(\pi) - \omega y(0) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $q(x)$ — вещественная функция, принадлежащая пространству $L_2[0,\pi]$, λ — спектральный параметр, α, β, γ, ω — вещественные числа, причем $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$. Эту задачу будем обозначать через $Y(\alpha)$. Отметим, что вопрос восстановления такой задачи в случае $\alpha = 0$ разными подходами полностью решен в работах [15, 17, 19, 25].

Пусть $c(x,\lambda), s(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (1), определяемая начальными условиями $c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0$. Учитывая тождество

$$c(x,\lambda)[s'(x,\lambda) + \gamma s(x,\lambda)] - s(x,\lambda)[c'(x,\lambda) + \gamma c(x,\lambda)] = 1,$$

легко убедиться, что характеристической функцией краевой задачи $Y(\alpha)$ будет

$$\delta(\lambda) = 2\omega - \eta(\pi,\lambda) + \omega^2 s(\pi,\lambda) + (\alpha\lambda+\beta)\sigma(\pi,\lambda),$$

где

$$\eta(\pi,\lambda) = c'(\pi,\lambda) + \gamma c(\pi,\lambda), \quad \sigma(\pi,\lambda) = s'(\pi,\lambda) + \gamma s(\pi,\lambda).$$

Нули функции $\delta(\lambda)$ являются собственными значениями задачи $Y(\alpha)$.

Обозначим через $W_2^n[0,\pi]$ пространство С. Л. Соболева, состоящее из заданных на отрезке $[0,\pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывную производную и производную n-го порядка, суммируемую с квадратом на $[0,\pi]$. В дальнейшем для краткости будем говорить, что выполняется условие (A), если для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (2) с $\alpha = 0$, выполняется неравенство

$$\gamma|y(\pi)|^2 - 2\omega\,\mathrm{Re}\left[\overline{y(0)}y(\pi)\right] - \beta|y(0)|^2 + \int_0^\pi \left\{|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2\right\} dx > 0. \tag{3}$$

Легко заметить, что это неравенство заведомо выполняется, если $\beta \le 0$, $\gamma \ge 0$, $|\omega| \le \sqrt{|\beta|\gamma}$, $q(x) > 0$. При выполнении условия (A) задача $Y(\alpha)$ имеет следующие спектральные свойства, которые доказываются методами работы [32].

1. Краевая задача имеет счетное множество собственных значений $\{\mu_k\}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Все собственные значения вещественны и отличны от нуля. Эта задача не имеет присоединенных функций к собственным функциям.

2. Если $y(x)$ — собственная функция задачи $Y(\alpha)$, соответствующая собственному значению λ, то $2\lambda M + N \neq 0$; более того, имеет место соотношение $\operatorname{sign}(2\lambda M + N) = \operatorname{sign}\lambda$, где $M = \int_0^\pi |y(x)|^2\,dx$, $N = \alpha|y(0)|^2$.

3. Собственные значения $\mu_k^{(1)}$ и $\mu_k^{(2)}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, краевых задач $Y(\alpha_1)$ и $Y(\alpha_2)$ $(\alpha_1 < \alpha_2)$ соответственно при $\omega < 0$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} \leq \mu_{+0}^{(1)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} < \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} \leq \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} < \ldots,$$

$$0 > \mu_{-0}^{(2)} \geq \mu_{-0}^{(1)} \geq \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} > \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} \geq \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} > \ldots,$$

а при $\omega > 0$ — неравенствам

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} < \mu_{+0}^{(1)} < \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} \leq \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} < \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} \leq \ldots,$$

$$0 > \mu_{-0}^{(2)} > \mu_{-0}^{(1)} > \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} \geq \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} > \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} \geq \ldots,$$

причем если $\mu_k^{(j)} = \mu_{k+1}^{(j)}$, то $\mu_{k-1}^{(3-j)} < \mu_k^{(3-j)} < \mu_{k+1}^{(3-j)}$.

В дальнейшем будем предполагать, что j принимает значения 1 и 2, $\alpha_j \neq 0$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Известно [31], что для собственных значений $\mu_k^{(j)}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, краевой задачи $Y(\alpha_j)$ при $|k| \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\mu_k^{(j)} = k + a_j + \frac{(-1)^{k+1}A_j - B_j}{k\pi} + \frac{\tau_k^{(j)}}{k}, \tag{4}$$

где

$$a_j = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\alpha_j, \quad A_j = \frac{2\omega}{\sqrt{1+\alpha_j^2}},$$

$$B_j = \frac{\beta}{1+\alpha_j^2} - \gamma - \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx, \quad \{\tau_k^{(j)}\} \in l_2.$$

Обозначим $\sigma_n = \operatorname{sign}\left[1 - |\omega s(\pi, \nu_n)|\right]$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, где ν_n — нули функции $\sigma(\pi, \lambda)$, квадраты которых являются собственными значениями краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями $y(0) = y'(\pi) + \gamma y(\pi) = 0$. Последовательности $\{\mu_k^{(1)}\}$, $\{\mu_k^{(2)}\}$ и $\{\sigma_n\}$ будем называть спектральными данными краевых задач $Y(\alpha_1)$ и $Y(\alpha_2)$.

3. Обратная задача. В этом пункте приводятся результаты по решению обратной задачи, которая ставится следующим образом: по заданным спектральным данным построить коэффициентную функцию $q(x)$ в уравнении Штурма – Лиувилля и коэффициенты α_j, β, γ, ω в граничных условиях.

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Краевые задачи $Y(\alpha_1)$ и $Y(\alpha_2)$ однозначно восстанавливаются по своим спектральным данным.*

Доказательство этой теоремы во многом аналогично доказательству теоремы 2.1 работы [21] (см. также [17]). Алгоритм восстановления краевых задач $Y(\alpha_1)$ и $Y(\alpha_2)$ по спектральным данным составляется аналогично алгоритму в [31].

Приведем теперь основной результат настоящей статьи — достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательности вещественных чисел* $\{\mu_k^{(1)}\}$, $\{\mu_k^{(2)}\}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *и* $\{\sigma_n\}$, $\sigma_n = -1, 0, 1$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, *были спектральными данными краевых задач вида* $Y(\alpha_1)$ *и* $Y(\alpha_2)$ $(\alpha_1 < \alpha_2)$, *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *имеет место асимптотическая формула* (4), *в которой* $A_j = 2\omega \cos \pi a_j$, ω, a_j, B_j — *вещественные числа*, $-\dfrac{1}{2} < a_j < \dfrac{1}{2}$, $a_1 > a_2$, $\omega \neq 0$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\tau_k^{(j)}\right)^2 < \infty$;

2) *числа* $\mu_k^{(1)}$ *и* $\mu_k^{(2)}$ *удовлетворяют неравенствам в свойстве* 3;

3) *выполняется неравенство* $b_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} |\delta_j(\nu_n) - 2\omega| - 2|\omega| \geq 0$, *где*

$$\delta_j(\lambda) = \frac{\pi\left(\mu_{-0}^{(j)} - \lambda\right)\left(\mu_{+0}^{(j)} - \lambda\right)}{\cos \pi a_j} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu_k^{(j)} - \lambda}{k}, \tag{5}$$

ν_n — *нули функции* $\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)$, *причем* $\nu_{-n} = -\nu_n$;

4) σ_n *принимает значение, равное нулю, если* $b_n = 0$, *и значение* 1 *или* –1, *если* $b_n > 0$, *причем существует такое* $N > 0$, *что* $\sigma_n = 1$ *для всех* $|n| \geq N$.

Доказательство. Положим $\alpha_j = -\operatorname{tg} \pi a_j$. Тогда из $a_1 > a_2$ следует, что $\alpha_1 < \alpha_2$. Поскольку числа $\mu_k^{(j)}$ подчиняются асимптотике (4), то в силу леммы 1.3 статьи [21] для функции (5) справедливо представление

$$\delta_j(\lambda) = \sqrt{1 + \alpha_j^2}\left[A_j + \lambda \sin \pi(\lambda - a_j) + B_j \cos \pi(\lambda - a_j) + f_j(\lambda - a_j)\right],$$

где

$$f_j(\lambda) = M_j \sin \lambda\pi + g_j(\lambda), \qquad g_j(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_j(t) e^{i\lambda t}\, dt, \quad \tilde{g}_j(t) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Отсюда

$$\delta_j(\lambda) = 2\omega + \lambda\left(\sin \lambda\pi + \alpha_j \cos \lambda\pi\right) + \left(B_j + \alpha_j M_j\right) \cos \lambda\pi +$$
$$+ \left(M_j - \alpha_j B_j\right) \sin \lambda\pi + \sqrt{1 + \alpha_j^2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_j(t) e^{i(\lambda - a_j)t}\, dt. \tag{6}$$

Поскольку $\delta_1(\nu_n) = \delta_2(\nu_n)$ и $\nu_{-n} = -\nu_n$, то из (6) имеем $B_1 + \alpha_1 M_1 = B_2 + \alpha_2 M_2$. Поэтому согласно формуле (6) для функции $\sigma(\lambda) = \dfrac{\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)}{(\alpha_1 - \alpha_2)\lambda}$ имеет место представление

$$\sigma(\lambda) = \cos \lambda\pi - B_3 \pi \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} + \int_0^{\pi} \tilde{g}(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda}\, dt,$$

где

$$B_3 = \frac{M_2 - M_1 + \alpha_1 B_1 - \alpha_2 B_2}{\pi(\alpha_1 - \alpha_2)}, \qquad \tilde{g}(t) \in L_2[0, \pi].$$

Согласно лемме 3.4.2 работы [33] (см. также лемму 12.3.3 в [10]) для нулей ν_n функции $\sigma(\lambda)$ справедлива асимптотическая формула

$$\nu_n = n - \frac{1}{2}\operatorname{sign} n - \frac{B_3}{n} + \frac{\eta_n}{n}, \quad \{\eta_n\} \in l_2. \tag{7}$$

Используя (6), для функции

$$u_1(\lambda) = \frac{\alpha_1\delta_2(\lambda) - \alpha_2\delta_1(\lambda)}{\alpha_1 - \alpha_2} - 2\omega \tag{8}$$

получаем представление вида

$$u_1(\lambda) = \lambda \sin \lambda\pi + D\cos\lambda\pi + M\sin\lambda\pi + \int\limits_{-\pi}^{\pi} r(t)e^{i\lambda t}\,dt, \tag{9}$$

где D, M — некоторые постоянные и $r(t) \in L_2[-\pi, \pi]$. Как в [21], определяется функция $u_2(\lambda)$, удовлетворяющая условию

$$u_2(\nu_n) = (-1)^{n+1}\sigma_n\sqrt{u_1^2(\nu_n) - 4\omega^2}, \tag{10}$$

следующим образом:

$$u_2(\lambda) = u_1(\lambda) - 2\omega^2\left[\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + B_4\pi\frac{4\cos\lambda\pi}{4\lambda^2 - 1} - \frac{M\sin\lambda\pi}{\lambda^2} + \frac{m(\lambda)}{\lambda^2}\right], \tag{11}$$

где B_4 — некоторая постоянная, $m(\lambda) = 2\sigma(\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\nu_n m_n}{\sigma'(\nu_n)(\lambda^2 - \nu_n)}$ — четная целая функция экспоненциального типа не выше π, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ и $\{m_n\} \in l_2$. Принимая во внимание (9) и (11), для функции

$$\lambda s(\lambda) = \frac{\lambda}{2\omega^2}[u_1(\lambda) - u_2(\lambda)] \tag{12}$$

получаем представление

$$\lambda s(\lambda) = \sin\lambda\pi + B_4\pi\frac{4\lambda\cos\lambda\pi}{4\lambda^2 - 1} + \frac{p(\lambda)}{\lambda},$$

где $p(\lambda) = -M\sin\lambda\pi + m(\lambda)$, $p(0) = p'(0) = 0$. Равенство $p'(0) = 0$ показывает, что $M = 0$. Поэтому в силу леммы 3.4.2 [33], если через λ_n, $n = \pm1, \pm2, \ldots$, обозначить нули функции $\lambda s(\lambda)$, то для них будет иметь место асимптотическая формула

$$\lambda_n = n - \frac{B_4}{n} + \frac{\xi_n}{n}, \quad \{\xi_n\} \in l_2. \tag{13}$$

Из (8) следует, что $u_1(\nu_n) = \delta_j(\nu_n) - 2\omega$. Тогда согласно второму и третьему условиям теоремы выполняются неравенства

$$u_1(\nu_{2n-1}) \geq 2|\omega|, \qquad u_1(\nu_{2n}) \leq -2|\omega|.$$

Следовательно, найдется число θ_n такое, что

$$u_1(\nu_n) = 2|\omega|(-1)^{n+1}\operatorname{ch}\theta_n. \tag{14}$$

Из соотношения (10) с учетом (14) получаем

$$u_2(\nu_n) = 2|\omega|(-1)^{n+1}\sigma_n|\operatorname{sh}\theta_n|. \tag{15}$$

Согласно равенствам (12), (14) и (15) имеем

$$s(\nu_n) = \frac{1}{2\omega^2}\left[u_1(\nu_n) - u_2(\nu_n)\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{|\omega|}\left(\operatorname{ch}\theta_n - \sigma_n|\operatorname{sh}\theta_n|\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{ch}\theta_n}{|\omega|}\left(1 - \sigma_n|\operatorname{th}\theta_n|\right).$$

Отсюда в силу очевидного неравенства $|\operatorname{th}\theta_n| < 1$ следует, что $\operatorname{sign} s(\nu_n) = (-1)^{n+1}$. Тогда легко убедиться, что $\nu_m^2 < \lambda_m^2 < \nu_{m+1}^2$, $m = 1, 2, \ldots$. Таким образом, нули функций $\sigma\big(\sqrt{\lambda}\big)$ и $\sqrt{\lambda}s(\sqrt{\lambda})$ перемежаются и удовлетворяют асимптотическим формулам (7) и (13), откуда следует (см. [34]), что существует единственная вещественная функция $q(x) \in L_2[0,\pi]$ такая, что рассматриваемые последовательности нулей являются спектрами краевых задач, порожденных на отрезке $[0,\pi]$ одним и тем же уравнением (1) с найденным коэффициентом $q(x)$ и граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \qquad y(0) = y'(\pi) + \gamma y(\pi) = 0$$

(где $\gamma = (B_4 - B_3)\pi$), и справедливы равенства $s(\lambda) = s(\pi,\lambda)$, $\sigma(\lambda) = \sigma(\pi,\lambda)$. Учитывая эти равенства, легко доказать, что спектры построенных краевых задач совпадают с последовательностями $\{\mu_k^{(1)}\}$ и $\{\mu_k^{(2)}\}$.

Теорема доказана.

Замечание. Из результатов пункта 2 и доказательства теоремы 2.1 работы [17] видно, что условия теоремы 2 также являются необходимыми при условии (A). Однако функция $q(x)$, построенная в доказательстве этой теоремы, может не удовлетворять неравенству (3).

Литература

1. *Chugunova M. V.* Inverse spectral problem for the Sturm – Liouville operator with eigenvalue parameter dependent boundary conditions // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2001. – **123**. – P. 187 – 194.
2. *Pivovarchik V. N., Van der Mee C.* The inverse generalized Regge problem // Inverse Problems. – 2001. – **17**. – P. 1831 – 1845.
3. *Ван Дер Мей К., Пивоварчик В. Н.* Обратная задача Штурма – Лиувилля с зависящими от спектрального параметра краевыми условиями // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 4. – С. 74 – 77.
4. *Guliyev N. J.* Inverse eigenvalue problems for Sturm – Liouville equaitons with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions // Inverse Problems. – 2005. – **21**. – P. 1315 – 1330.
5. *Mamedov Kh. R.* On the inverse problem for Strum – Liouville operator with a non-linear spectral parameter in the boundary condition // J. Korean Math. Soc. – 2009. – **46**, № 6. – P. 1243 – 1254.
6. *Freiling G., Yurko V.* Inverse problems for Sturm – Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter // Inverse Problems. – 2010. – **26**. – 17 p.
7. *Amirov R. Kh., Topsakal N., Güldü Y.* On impulsive Sturm – Liouville operators with Coulomb potential and spectral parameter linearly contained in boundary conditions // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 9. – С. 1155 – 1172.
8. *Panakhov E. S., Koyunbakan H., Unal Ic.* Reconstruction formula for the potential function of Sturm – Liouville problem with eigenparameter boundary condition // Inverse Probl. Sci. and Eng. – 2010. – **18**, № 1. – P. 173 – 180.
9. *Güldü Y., Amirov R. Kh., Topsakal N.,* On impulsive Sturm – Liouville operators with singularity and spectral parameter in boundary conditions // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 12. – С. 1610 – 1629.

10. *Möller M., Pivovarchik V.* Spectral theory of operator pencils, Hermite – Biehler functions, and their applications. – Birkhäuser: Cham, 2015. – 412 p.
11. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – М.: Наука, 1968. – 504 с.
12. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
13. *Станкевич И. В.* Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. – 1970. – **192**, № 1. – С. 34 – 37.
14. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. – 1975. – **97**, № 4. – С. 540 – 606.
15. *Плаксина О. А.* Обратные задачи спектрального анализа для оператора Штурма – Лиувилля с неразделенными граничными условиями. II // Мат. сб. – 1988. – **136**, № 1. – С. 140 – 159.
16. *Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Об одном классе обратных краевых задач для операторов Штурма – Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 7. – С. 1114 – 1120.
17. *Гасымов М. Г., Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Обратная задача для оператора Штурма – Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 6. – С. 46 – 54.
18. *Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Решение одного класса обратных краевых задач Штурма – Лиувилля // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 5. – С. 35 – 48.
19. *Yurko V. A.* The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions // J. Math. Anal. and Appl. – 2000. – **250**. – P. 266 – 289.
20. *Набиев И. М.* Обратная спектральная задача для оператора диффузии на отрезке // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2004. – **11**, № 3. – С. 302 – 313.
21. *Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 11. – С. 47 – 66.
22. *Макин А. С.* Обратные задачи спектрального анализа для оператора Штурма – Лиувилля с регулярными краевыми условиями. II // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 12. – С. 1626 – 1636.
23. *Nabiev I. M.* Determination of the diffusion operator on an interval // Colloq. Math. – 2014. – **134**, № 2. – P. 165 – 178.
24. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* Теоремы разрешимости обратной несамосопряженной задачи Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 2015. – **51**, № 6. – С. 706 – 713.
25. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* О разрешимости обратных задач Штурма – Лиувилля с самосопряженными краевыми условиями // Докл. РАН. – 2016. – **466**, № 5. – С. 526 – 528.
26. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* Обратная задача для пучка операторов с нераспадающимися краевыми условиями // Докл. РАН. – 2009. – **425**, № 1. – С. 31 – 33.
27. *Yurko V. A.* Inverse problems for nonselfadjoint quasi-periodic differential pencils // Anal. and Math. Phys. – 2012. – **2**. – P. 215 – 230.
28. *Nabiev I. M., Shukurov A. Sh.* Properties of the spectrum and uniqueness of reconstruction of Sturm – Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition // Proc. Inst. Math. and Mech. NAS Azerbaijan. – 2014. – **40**, Special Issue. – P. 332 – 341.
29. *Freiling G., Yurko V.* Recovering nonselfadjoint differential pencils with nonseparated boundary conditions // Appl. Anal. – 2015. – **94**, № 8. – P. 1649 – 1661.
30. *Ахтямов А. М., Кумушбаев Р. Р.* Идентификация полинома в нераспадающихся краевых условиях по одному собственному значению // Дифференц. уравнения. – 2016. – **52**, № 5. – С. 692 – 695.
31. *Ibadzadeh Ch. G., Nabiev I. M.* An inverse problem for Sturm – Liouville operators with non-separated boundary conditions containing the spectral parameter // J. Inverse and Ill-Posed Probl. – 2016. – **24**, № 4. – P. 407 – 411.
32. *Набиев И. М.* Кратность и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля // Мат. заметки. – 2000. – **67**, № 3. – С. 369 – 381.
33. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
34. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.

Получено 12.11.16,
после доработки — 01.01.17