ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ. I

© 2020 г. З. С. Алиев, Н. Б. Керимов, В. А. Мехрабов

Рассматривается спектральная задача, возникающая при описании изгибных колебаний однородного стержня, в сечениях которого действует продольная сила, левый конец которого закреплён, а на правом конце сосредоточен инерционный груз. Даётся общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси, изучаются структура корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных функций, исследуются базисные свойства в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, системы собственных функций этой задачи.

DOI: 10.1134/S037406412002

1. Введение. Рассмотрим однородную балку Эйлера–Бернулли с длиной L, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F, левый конец которой заделан, а на правом конце сосредоточен груз массой m и моментом инерции I. Свободные изгибные колебания однородного стержня с постоянной жёсткостью, в сечениях которой действует продольная сила, описываются уравнением [1, с. 152]

$$EJ\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4} - \frac{\partial}{\partial X}\left(\tilde{Q}(X)\frac{\partial U(X,t)}{\partial X}\right) + \rho F\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $U(X,t)$ – прогиб текущей точки оси стержня, EJ – изгибная жёсткость стержня, $\tilde{Q}(X)$ – продольная сила, ρ – плотность стержня. При $t=0$ должны выполняться начальные условия

$$U(X,0) = f(X), \quad \frac{\partial U(X,0)}{\partial t} = g(X).$$

Если левый конец заделан, а на правом конце расположен сосредоточенный инерционный груз, то краевые условия записываются в следующем виде [1, с. 153–154]:

$$U(0,t) = 0, \quad \frac{\partial U(0,t)}{\partial X} = 0,$$

$$EJ\frac{\partial^2 U(L,t)}{\partial X^2} = I\frac{\partial^3 U(L,t)}{\partial X\partial t^2}, \quad EJ\frac{\partial^3 U(L,t)}{\partial X^3} - \tilde{Q}(L)\frac{\partial U(L,t)}{\partial X} = -m\frac{\partial^2 U(L,t)}{\partial t^2}.$$

Вводя обозначения $x = X/L$, $u = U/L$, запишем уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня и краевые условия в виде

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{\rho F L^4}{EJ}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0,$$

$$EJ\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} = IL\frac{\partial^3 u(1,t)}{\partial x\partial t^2}, \quad EJ\frac{\partial^3 u(1,t)}{\partial x^3} - Q(1)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = -mL^3\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial t^2},$$

где $Q(x) = L^2\tilde{Q}(Lx)$.

Обозначим $\rho FL^4\omega^2/(EI)$ через λ. Тогда поставленная выше задача о свободных изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ [1, с. 193] сводится к следующей спектральной задаче:

$$\ell(y)(x) \equiv y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1.1}$$

$$U_1(\lambda, y) \equiv y(0) = 0, \quad U_2(\lambda, y) \equiv y'(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$U_3(\lambda, y) \equiv y''(1) - a_1\lambda y'(1) = 0, \tag{1.3}$$

$$U_4(\lambda, y) \equiv Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0, \tag{1.4}$$

где $q(x) \equiv N(x)$, $Ty \equiv y''' - qy'$, $a_1 = I/(\rho FL^3)$, $a_2 = m/(\rho FL)$.

Заметим, что выполняются условия

$$q(x) > 0, \quad x \in [0,1], \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

Далее считаем, что $q(x)$ – абсолютно непрерывная на промежутке $[0,1]$ функция.

Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях в различных постановках задач изучались в большом числе работ. В частности, базисные свойства систем корневых функций в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях исследовались в работах [2–11], а спектральной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка со спектральным параметром в одном из граничных условий – в работах [12–15].

В работе [16] изучены расположение собственных значений в комплексной плоскости (на вещественной оси), структура корневых подпространств, осцилляционные свойства собственных функций и их производных, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, исследованы базисные свойства подсистем собственных функций задачи (1.1)–(1.4) при $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. В [16] установлены необходимое и достаточное условие, а также достаточные условия для базисности в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций задачи (1.1)–(1.4) после удаления двух функций. Нахождение достаточных условий основано на асимптотике собственных значений и собственных функций и на осцилляционных свойствах собственных функций и их производных.

Отметим, что знаки параметров a_1 и a_2 играют в рассматриваемых вопросах существенную роль. Если $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$, то задача (1.1)–(1.4) – это спектральная задача для самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \bigoplus \mathbb{C}^2$. Если $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, то эта задача эквивалентна спектральной задаче для некоторого J-самосопряжённого оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_1 = L_2(0,1) \bigoplus \mathbb{C}^2$ (см., например, [2, 7, 9, 10, 17–20]). В случае $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$ собственные значения задачи (1.1)–(1.4) являются положительными, простыми и образуют неограниченную возрастающую последовательность. В случае $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ в настоящей работе доказывается, что все собственные значения задачи (1.1)–(1.4) вещественные и простые, среди них ровно одно отрицательное, а остальные – положительные, образующие стремящуюся к бесконечности последовательность.

Целью настоящей работы является исследование расположения собственных значений на вещественной оси, структуры корневых подпространств и базисных свойств в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, системы собственных функций задачи (1.1)–(1.4) при $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$.

2. Некоторые вспомогательные факты и утверждения. Введём следующие граничные условия (см. [21, 22]):

$$\tilde{U}_3(\lambda, y) \equiv y'(1)\cos\gamma + y''(1)\sin\gamma = 0, \tag{2.1}$$

$$\tilde{U}_4(\lambda, y) \equiv y(1)\cos\delta - Ty(1)\sin\delta = 0, \tag{2.2}$$

где $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$.

Наряду с краевой задачей (1.1)–(1.4) рассмотрим краевые задачи (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) и (1.1), (1.2), (2.1), (1.4). Задача (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) в более общей постановке рассмотрена в [21, 22], а задача (1.1), (1.2), (2.1), (1.4), в случае, когда граничные условия (1.2) и (1.4) имеют более общие формы, рассмотрена в [15] (см. также [12–14, 23]). В работах [21, 22] исследовались осцилляционные свойства собственных функций и их производных, а в работах [12–15, 23] – осцилляционные свойства собственных функций и базисные свойства в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, систем собственных функций рассматриваемых задач.

Следующая теорема является частным случаем основного результата из [21].

Теорема 2.1 (см. [21, теоремы 5.4 и 5.5]). *Собственные значения краевой задачи (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) являются положительными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность* $\{\lambda_k((\gamma,\delta)\}_{k=1}^{\infty}$. *Собственная функция* $y_k^{(\gamma,\delta)}(x)$, *соответствующая собственному значению* $\lambda_k(\gamma,\delta)$, *имеет в точности* $k-1$ *простых нулей в интервале* $(0,1)$.

Из доказательства утверждения (i) теоремы 4.1 работы [15] следует, что для задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) имеет место следующая

Теорема 2.2. *Для каждого фиксированного* $\gamma \in [0,\pi/2]$ *существует неограниченно возрастающая последовательность простых собственных значений* $\lambda_1(\gamma)$, $\lambda_2(\gamma)$, $\ldots$, $\lambda_k(\gamma)$, $\ldots$ *краевой задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4). Кроме того, эти собственные значения имеют следующее расположение на вещественной оси:*

$$\lambda_1(\gamma) \in (-\infty, 0), \quad \lambda_k(\gamma) \in (\lambda_{k-1}(\gamma,\pi/2), \lambda_{k-1}(\gamma,0)), \quad k = 2,3,4,\ldots$$

В гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \bigoplus \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(\hat{y},\hat{v}) = (\{y,m\},\{v,s\}) = (y,v)_{L_2} + a_2^{-1} m\bar{s},$$

где $(y,v)_{L_2}$ – скалярное произведение в $L_2(0,1)$, определим оператор

$$B\hat{y} = B\{y,m\} = \{\ell(y), Ty(1)\}$$

с областью определения $D(B) = \{\{y(x),m\} : y \in W_2^4(0,1),\ \ \ell(y) \in L_2(0,1),\ \ y(0) = y'(0) = y'(1)\cos\gamma + (py'')(1)\sin\gamma = 0,\ \ m = a_2 y(1)\}$, являющейся всюду плотной в H (см. [24]). Тогда задача (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) приобретает вид

$$B\hat{y} = \lambda\hat{y}, \quad \hat{y} \in D(B),$$

т.е. собственные значения λ_k, $k \in \mathbb{N}$, оператора B и задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) совпадают между собой (с учётом их кратности), а между корневыми функциями имеется взаимно однозначное соответствие: $y_k(x) \leftrightarrow \hat{y}_k = \{y_k(x), m_k\}$, $m_k = a_2 y_k(1)$.

Заметим, что B является замкнутым (несамосопряжённым) оператором в H с компактной резольвентой.

Определим оператор $\tilde{J} : H \to H$ следующим образом: $\tilde{J}\{y,m\} = \{y,-m\}$. Этот оператор порождает пространство Понтрягина $\tilde{\Pi}_1 = L_2(0,1) \bigoplus \mathbb{C}$ с внутренним произведением (см. [15, 19])

$$[\hat{y},\hat{v}]_1 = (\hat{y},\hat{v})_{\tilde{\Pi}_1} = (\{y,m\},\{v,s\})_{\tilde{\Pi}_1} = (y,v)_{L_2} - a_2^{-1} m\bar{s}.$$

В силу [15, теорема 2.1] оператор B является $\tilde{J}$-самосопряжённым и $\tilde{J}$-положительным в $\tilde{\Pi}_1$.

Пусть $R[\hat{y}]$ – отношение Релея, т.е.

$$R[\hat{y}] = \frac{[B\hat{y},\hat{y}]_1}{[\hat{y},\hat{y}]_1} = \left(\int\limits_0^1 y^2(x)\,dx - a_2 y^2(1)\right)^{-1} \left(\int\limits_0^1 y''^2(x)\,dx + \int\limits_0^1 q(x) y'^2(x)\,dx + N[y]\right),$$

где $N[y] = y'^2(1)\cot\gamma$ при $\gamma \neq 0$, $N[y] = 0$ при $\gamma = 0$.

В силу [25, предложение 2] (см. также [26]) имеем

$$\lambda_1(\gamma) = \inf_{\mathfrak{L}\subset\mathcal{M}_-} \sup_{\hat{y}\in\mathfrak{L}} R[\hat{y}], \quad \lambda_k(\gamma) = \sup_{\mathfrak{L}\subset\mathcal{M}_+} \sup_{\mathcal{V}^{(k-2)}\subset\mathcal{L}} \inf_{\substack{\hat{y}\in\mathfrak{L} \\ [\hat{y},\mathcal{V}^{(k-2)}]=0}} R[\hat{y}], \quad k = 2,3, \tag{2.3}$$

где $\mathfrak{L}$ – множество векторов $\hat{y} = \{y, m\} \in \tilde{\Pi}_1$ таких, что функция y удовлетворяет граничным условиям (1.2), (2.1), (1.4), $V^{(k)}$ – произвольное множество линейно независимых векторов $\{\hat{v}_j\}_{j=1}^k \in \tilde{\Pi}_1$, $\hat{v}_j = \{v_j, s_j\}$, таких, что функции v_j, $j = \overline{1,k}$, удовлетворяют граничным условиям (1.2), (2.1), (1.4), а M_ν, $\nu = \pm$, – множество векторов $\hat{v} \in \tilde{\Pi}_1$ таких, что $\nu[\hat{v}, \hat{v}]_1 > 0$.

Имеет место следующее свойство собственных значений задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4), а именно:

Теорема 2.3. *Как функции параметра $\gamma \in [0, \pi/2]$ отрицательное собственное значение задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) является непрерывной, строго возрастающей функцией, а положительные собственные значения этой задачи являются непрерывными строго убывающими функциями.*

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 9 монографии [27, с. 397] с использованием соотношений (2.4).

Из теоремы 2.3 следует, что

$$\lambda_1(0) < \lambda_1(\pi/2) < 0 < \lambda_2(\pi/2) < \lambda_2(0) < \lambda_3(\pi/2) < \ldots \tag{2.4}$$

3. Единственность и основные свойства решений задачи (1.1), (1.2), (1.4). В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение $y(x, \lambda)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4).*

Доказательство. Обозначим через $z_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1,4}$, решение уравнения (1.1), нормированное при $x = 0$ условиями Коши

$$z_k^{(s-1)}(0, \lambda) = \delta_{ks}, \quad s = \overline{1,3}, \quad Tz_k(0, \lambda) = \delta_{k4}, \tag{3.1}$$

где δ_{ks} – символ Кронекера.

Будем искать функцию $y(x, \lambda)$ в виде

$$y(x, \lambda) = C_1 z_1(x, \lambda) + C_2 z_2(x, \lambda) + C_3 z_3(x, \lambda) + C_4 z_4(x, \lambda), \tag{3.2}$$

где C_k, $k = \overline{1,4}$, – некоторые постоянные.

В силу равенств (3.1) и граничных условий (1.2), (1.4) из представления (3.2) следует, что $C_1 = C_2 = 0$ и

$$C_3(Tz_3(1, \lambda) - a_2\lambda z_3(1, \lambda)) + C_4(Tz_4(1, \lambda) - a_2\lambda z_4(1, \lambda)) = 0.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$|Tz_3(1, \lambda) - a_2\lambda z_3(1, \lambda)| + |Tz_4(1, \lambda) - a_2\lambda z_4(1, \lambda)| > 0. \tag{3.3}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Если для него не выполняется неравенство (3.3), то функции $z_3(x, \lambda)$ и $z_4(x, \lambda)$ являются решениями задачи (1.1), (1.2), (1.4). Определим функцию $v(x, \lambda)$ следующим образом:

$$v(x, \lambda) = z_4'(1, \lambda) z_3(x, \lambda) - z_3'(1, \lambda) z_4(x, \lambda).$$

Так как $v'(1, \lambda) = 0$, то функция $v(x, \lambda)$ является собственной функцией спектральной задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) при $\gamma = 0$, соответствующей собственному значению λ. В силу теоремы 2.2 имеем включение $\lambda \in \mathbb{R}$, которое противоречит предположению $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{R}$ и неравенство (3.3) не выполняется. В этом случае, наряду с функцией $v(x, \lambda)$, определим функцию

$$w(x, \lambda) = z_4''(1, \lambda) z_3(x, \lambda) - z_3''(1, \lambda) z_4(x, \lambda).$$

Так как $w''(1, \lambda) = 0$, то функция $w(x, \lambda)$ является собственной функцией спектральной задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) при $\gamma = \pi/2$, соответствующей собственному значению $\lambda \in \mathbb{R}$. С другой стороны, в силу приведённых выше рассуждений λ является также собственным значением задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) при $\gamma = 0$, что противоречит соотношению (2.4). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Из доказательства теоремы 3.1 видно, что, не нарушая общности, решение $y(x,\lambda)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4) для каждого фиксированного $x \in [0,1]$ можно считать целой функцией переменной λ вида

$$y(x,\lambda) = (Tz_4(1,\lambda) - a_2\lambda z_4(1,\lambda))z_3(x,\lambda) - (Tz_3(1,\lambda) - a_2\lambda z_3(1,\lambda))z_4(x,\lambda).$$

Пусть $S_k = (\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(0))$, $k \in \mathbb{N}$, где $\lambda_0(0) = -\infty$. Очевидно, что собственные значения $\lambda_k(0)$ и $\lambda_k(\pi/2)$ спектральной задачи (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) при $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$ являются нулями целых функций $y'(1,\lambda)$ и $y''(1,\lambda)$ соответственно. Заметим, что функция $G(\lambda) = y''(1,\lambda)/y'(1,\lambda)$ определена для значений $\lambda \in S \equiv (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \bigcup (\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k)$, причём $\lambda_k(\pi/2)$ и $\lambda_k(0)$ – нули и полюсы этой функции соответственно, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.1. *Справедлива формула*

$$\frac{dG(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{y'^2(1,\lambda)}\left\{\int_0^l y^2(x,\lambda)\,dx - a_2y^2(1,\lambda)\right\}, \quad \lambda \in S. \tag{3.4}$$

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 3.3 из работы [16].

Замечание 3.2. Из формулы (3.4) видно, что в случае $a_2 < 0$ функция $G(\lambda)$ является строго убывающей в каждом интервале S_k, $k \in \mathbb{N}$. В случае же $a_2 > 0$ эта формула не даёт никакой информации о поведении функции $G(\lambda)$ в интервалах S_k, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.2. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\lambda\to-\infty} G(\lambda) = +\infty. \tag{3.5}$$

Доказательство леммы 3.2 проводится по схеме доказательства леммы 3.4 из работы [16].

Для изучения поведения функции $G(\lambda)$ на интервале S_k, $k \in \mathbb{N}$, нам понадобится

Лемма 3.3. *Имеет место представление*

$$G(\lambda) = G(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda c_k}{\lambda_k(0)(\lambda - \lambda_k(0))}, \tag{3.6}$$

где $c_k = \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k(0)} G(\lambda)$, $c_1 < 0$ *и* $c_k > 0$ *при* $k = 2, 3, \ldots$

Доказательство. Согласно теореме Миттаг–Лефлера [28, с. 117] мероморфная функция $G(\lambda)$ с простыми полюсами μ_k, $k \in \mathbb{N}$, допускает представление

$$G(\lambda) = G_1(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_k(0)}\right)^{s_k} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k(0)}, \tag{3.7}$$

где $G_1(\lambda)$ – целая функция,

$$c_k = \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k(0)} G(\lambda) = \frac{y''_{xx}(1,\lambda_k(0))}{y''_{x\lambda}(1,\lambda_k(0))}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

и целые числа s_k, $k \in \mathbb{N}$, выбираются такими, чтобы ряд в правой части (3.7) равномерно сходился в любом конечном круге (после отбрасывания конечного числа членов, имеющих в этом круге полюсы).

Так как $\lambda_1(0) < \lambda_1(\pi/2)$, то из соотношения (3.5) следует, что $G(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1(0))$. Следовательно, имеем

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1(0)-0} G(\lambda) = +\infty, \tag{3.9}$$

откуда, поскольку $\lambda_1(0)$ является простым полюсом функции $G(\lambda)$, следует равенство

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1(0)+0} G(\lambda) = -\infty. \tag{3.10}$$

Из неравенств (2.4) вытекает, что $\lambda_1(\pi/2), \lambda_2(\pi/2) \in (\lambda_1(0), \lambda_2(0))$. Тогда в силу равенства (3.10) для достаточно малых $\varrho > 0$ выполняются соотношения

$$G(\lambda_1(\pi/2) - \varrho) < 0, \quad G(\lambda_1(\pi/2)) = 0, \quad G(\lambda_1(\pi/2) + \varrho) > 0,$$

$$G(\lambda_2(\pi/2) - \varrho) > 0, \quad G(\lambda_2(\pi/2)) = 0, \quad G(\lambda_2(\pi/2) + \varrho) < 0,$$

Следовательно, имеем

$$\lim_{\lambda\to\lambda_2(0)-0} G(\lambda) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda\to\lambda_2(0)+0} G(\lambda) = +\infty. \tag{3.11}$$

Далее, так как $\lambda_k(\pi/2) \in (\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(0))$ является простым нулём функции $G(\lambda)$ при $k \geqslant 3$, то для достаточно малых $\varrho > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$G(\lambda_k(\pi/2) - \varrho) > 0, \quad G(\lambda_k(\pi/2) + \varrho) < 0.$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$G(\lambda_k(0) - 0) = -\infty, \quad G(\lambda_k + 0) = +\infty, \quad k = 3, 4, \ldots \tag{3.12}$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что $y'_x(1,\lambda) > 0$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1(0))$. Тогда, следуя приведённым выше рассуждениям, получаем

$$y''_{xx}(1,\lambda_1(0)) > 0, \quad y''_{x\lambda}(1,\lambda_1(0)) < 0; \quad y''_{xx}(1,\lambda_2(0)) > 0, \quad y''_{x\lambda}(1,\lambda_2(0)) > 0;$$

$$(-1)^k y''_{xx}(1,\lambda_k(0)) > 0, \quad (-1)^k y''_{x\lambda}(1,\lambda_k(0)) > 0, \quad k = 3, 4, \ldots$$

Поэтому в силу (3.8) имеем $c_1 < 0$ и $c_k > 0$ при $k = 2, 3, \ldots$

Пусть $\Omega_k(\varepsilon) = \{\lambda : |\sqrt[4]{\lambda} - \sqrt[4]{\lambda_k(0)}| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in (0,1)$. Согласно [15, формула (5.7)] для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ справедлива асимптотическая формула

$$\sqrt[4]{\lambda_k(0)} = (k - 1/2)\pi + O(1/k), \tag{3.13}$$

из которой следует, что при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ области $\Omega_k(\varepsilon)$ не пересекаются и каждая из них содержит только один полюс $\lambda_k(0)$ функции $G(\lambda)$.

В силу [16, формула (3.11)] вне областей $\Omega_k(\varepsilon)$ имеет место асимптотическая формула

$$G(\lambda) = \sqrt[4]{\lambda}\,\frac{\cos\sqrt[4]{\lambda} - \sin\sqrt[4]{\lambda}}{\cos\sqrt[4]{\lambda}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}\right)\right).$$

Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым в [29, с. 252–253] (см. там же формулу (27)), несложно показать, что вне областей $\Omega_k(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|G(\lambda)| \leqslant M\sqrt[4]{|\lambda|}, \tag{3.14}$$

где M – некоторая положительная константа. Учитывая (3.14), для коэффициента c_k, заданного равенством (3.8), получаем оценку

$$c_k = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega_k(\varepsilon)} G(\lambda)d\lambda\right| = \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_{|\nu - \sqrt{\lambda_k(0)}|=\varepsilon} \nu^3 G(\nu^4)\,d\nu\right| \leqslant 4Mk^4. \tag{3.15}$$

Вследствие (3.15) и асимптотической формулы (3.13) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k|\lambda_k(0)|^{-2}$ сходится. Тогда, согласно [28, с. 116, теореме 2], в формуле (3.7) можно положить $s_k = 1, \; k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность расширяющихся окружностей, не пересекающих области $\Omega_n(\varepsilon)$. Тогда в силу [36, с. 227, формула (9)] справедливо равенство

$$G(\lambda) - \sum_{\lambda_k(0)\in \mathrm{int}\Gamma_n} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k(0)} = \int\limits_{\Gamma_n} \frac{G(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi,$$

из которого вытекает, что

$$G(\lambda) - G(0) - \sum_{\lambda_k(0)\in \mathrm{int}\Gamma_n} \frac{\lambda c_k}{\lambda_k(0)(\lambda - \lambda_k(0))} = \int\limits_{\Gamma_n} \frac{\lambda G(\xi)}{\xi(\xi - \lambda)}\, d\xi. \tag{3.16}$$

В силу оценки (3.14) правая часть равенства (3.16) стремится к нулю при $n \to +\infty$. Тогда, переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем представление (3.6). Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Функция* $G(\lambda)$ *является вогнутой в интервале* $(\lambda_1(0), \lambda_2(0))$.

Доказательство. Продифференцировав тождество (3.6) дважды, будем иметь

$$\frac{d^2G(\lambda)}{d\lambda^2} = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda - \lambda_k(0))^3},$$

откуда следует, что $d^2G(\lambda)/d\lambda^2 > 0$ при $\lambda \in (\lambda_1(0), \lambda_2(0))$. Следствие доказано.

4. Структура корневых подпространств краевой задачи (1.1)–(1.4).

Лемма 4.1. *Собственные значения задачи (1.1)–(1.4) являются вещественными.*

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ – нетривиальное решение задачи (1.1), (1.2), (1.4). Заметим, что собственными значениями задачи (1.1)–(1.4) являются корни уравнения

$$y''(1, \lambda) - a_1\lambda y'(1, \lambda) = 0. \tag{4.1}$$

Если λ является невещественным собственным значением задачи (1.1)–(1.4), то $\bar{\lambda}$ также является собственным значением этой задачи, поскольку коэффициенты $q(x), a_1, a_2$ вещественны. При этом $y(x, \bar{\lambda}) = \overline{y(x, \lambda)}$, так что если соотношение (4.1) справедливо для λ, оно будет справедливым и для $\bar{\lambda}$.

Вследствие уравнения (1.1) и определения оператора T имеем

$$(Ty(x, \mu))'y(x, \lambda) - (Ty(x, \lambda))'y(x, \mu) = (\mu - \lambda)y(x, \mu)y(x, \lambda).$$

Интегрируя это тождество в пределах от 0 до 1, используя формулу интегрирования по частям и принимая во внимание граничные условия (1.2) и (1.4), получаем

$$-y''(1, \mu)y'(1, \lambda) + y''(1, \lambda)y'(1, \mu) = (\mu - \lambda)\Big\{\int\limits_0^1 y(x, \mu)y(x, \lambda)\, dx - a_2 y(1, \mu)y(1, \lambda)\Big\}. \tag{4.2}$$

Полагая $\mu = \bar{\lambda}$ в (4.2), приходим к тождеству

$$-\overline{y''(1, \lambda)}y'(1, \lambda) + y''(1, \lambda)\overline{y'(1, \lambda)} = (\bar{\lambda} - \lambda)\Big\{\int\limits_0^1 |y(x, \lambda)|^2\, dx - a_2|y(1, \lambda)|^2\Big\},$$

вследствие которого, учитывая граничное условие (1.3), получаем

$$-a_1(\bar{\lambda} - \lambda)|y'(1, \lambda)|^2 = (\bar{\lambda} - \lambda)\Big\{\int\limits_0^1 |y(x, \lambda)|^2\, dx - a_2|y(1, \lambda)|^2\Big\}.$$

Отсюда, так как $\bar{\lambda} \neq \lambda$, вытекает, что

$$\int_0^1 |y(x,\lambda)|^2\,dx + a_1|y'(1,\lambda)|^2 - a_2|y(1,\lambda)|^2 = 0. \tag{4.3}$$

С другой стороны, умножая обе части уравнения (1.1) на $\overline{y(x,\lambda)}$, интегрируя полученное тождество в пределах от 0 до 1, используя формулу интегрирования по частям и учитывая граничные условия (1.2)–(1.4), находим

$$\int_0^1 |y''(x,\lambda)|^2\,dx + \int_0^1 q(x)|y'(x,\lambda)|^2\,dx = \lambda\Big\{\int_0^1 |y(x,\lambda)|^2\,dx + a_1|y'(1,\lambda)|^2 - a_2|y(1,\lambda)|^2\Big\}. \tag{4.4}$$

С учётом равенства (4.3), из (4.4) получаем

$$\int_0^1 |y''(x,\lambda)|^2\,dx + \int_0^1 q(x)|y'(x,\lambda)|^2\,dx = 0,$$

откуда в силу условия (1.2) следует тождество $y(x,\lambda) \equiv 0$. Это противоречие показывает, что собственные значения задачи (1.1)–(1.4) являются вещественными. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Собственные значения задачи (1.1)–(1.4) являются простыми и образуют не более чем счётное множество без конечной предельной точки.*

Доказательство. Целая функция, стоящая в левой части уравнения (4.1), не обращается в нуль при невещественных λ. Следовательно, она не обращается в нуль тождественно. Поэтому её нули образуют не более чем счётное множество без конечной предельной точки.

Теперь покажем, что уравнение (4.1) имеет только простые корни. Действительно, если $\lambda = \tilde{\lambda}$ является кратным корнем уравнения (4.1), то имеют место равенства

$$y''(1,\tilde{\lambda}) - a_1\tilde{\lambda}y'(1,\tilde{\lambda}) = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial y''(1,\tilde{\lambda})}{\partial\lambda} - a_1y'(1,\tilde{\lambda}) - a_1\tilde{\lambda}\frac{\partial y'(1,\tilde{\lambda})}{\partial\lambda} = 0. \tag{4.6}$$

Поделив обе части равенства (4.2) на $\mu - \lambda$ $(\mu \neq \lambda)$ и перейдя затем в нём к пределу при $\mu \to \lambda$, получим

$$-\frac{\partial y''(1,\lambda)}{\partial\lambda}y'(1,\lambda) + y''(1,\lambda)\frac{\partial y'(1,\lambda)}{\partial\lambda} = \int_0^1 y^2(x,\lambda)\,dx - a_2y^2(1,\lambda). \tag{4.7}$$

Учитывая (4.5) и (4.6), из (4.7) находим, что

$$\int_0^1 y^2(x,\tilde{\lambda})\,dx - a_2y^2(1,\tilde{\lambda}) + a_1y'^2(1,\tilde{\lambda}) = 0. \tag{4.8}$$

Так как $\tilde{\lambda}$ является вещественным собственным значением задачи (1.1)–(1.4), то, согласно (4.4), имеем

$$\int_0^1 y''^2(x,\tilde{\lambda})\,dx + \int_0^1 q(x)y'^2(x,\tilde{\lambda})\,dx = \tilde{\lambda}\Big\{\int_0^1 y^2(x,\tilde{\lambda})\,dx - a_2y^2(1,\tilde{\lambda}) + a_1y'^2(1,\tilde{\lambda})\Big\}. \tag{4.9}$$

Принимая во внимание (4.8), из (4.9) получаем

$$\int_0^1 y''^2(x,\tilde\lambda)\,dx + \int_0^1 q(x)y'^2(x,\tilde\lambda)\,dx = 0,$$

откуда в силу тождества (1.2) следует тождество $y(x,\tilde\lambda) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание 4.1. Из равенства (4.4) и условия (1.2) вытекает, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1.1)–(1.4).

Замечание 4.2. Если λ – собственное значение задачи (1.1)–(1.4), то вследствие соотношений (2.3) заключаем, что $y'(1,\lambda) \neq 0$.

Как следует из замечания 4.2 и уравнения (4.1), собственными значениями задачи (1.1)–(1.4) являются корни уравнения

$$G(\lambda) = a_1\lambda. \tag{4.10}$$

Лемма 4.3. *Краевая задача (1.1)–(1.4) в каждом интервале* S_k, $k = 3,4,\ldots,$ *может иметь только одно собственное значение.*

Доказательство. Пусть k_0 $(k_0 \neq 0,1)$ – произвольное натуральное число. Если $\tilde\lambda \in S_{k_0}$ является собственным значением задачи (1.1)–(1.4), то из (4.9) следует, что

$$\int_0^1 y^2(x,\tilde\lambda)\,dx - a_2y^2(1,\tilde\lambda) + a_1y'^2(1,\tilde\lambda) > 0.$$

Тогда в силу тождества (3.4) из этого соотношения вытекает неравенство

$$\frac{d}{d\lambda}(G(\lambda) - a_1\lambda)\Big|_{\lambda=\tilde\lambda} < 0.$$

Так как $G(\tilde\lambda) - a_1\tilde\lambda = 0$, то отсюда следует, что функция $G(\lambda) - a_1\lambda$ в интервале S_{k_0} принимает нулевое значение, только строго убывая. Следовательно, уравнение (4.10) имеет единственное решение $\tilde\lambda$ в интервале S_{k_0}. Доказательство леммы завершено.

Теорема 4.1. *Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений* λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, $\ldots$ *краевой задачи (1.1)–(1.4) такая, что*

$$\lambda_1 \in (\lambda_1(0), \lambda_1(\pi/2)), \quad \lambda_2 \in (0, \lambda_2(\pi/2)), \quad \lambda_k \in (\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(\pi/2)), \quad k = 3,4,\ldots$$

Доказательство. Напомним, что собственными значениями задачи (1.1)–(1.4) являются корни уравнения (4.10). Из соотношений (3.5) и (3.9)–(3.12) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1(0)-0} G(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\lambda_k(0)-0} G(\lambda) = -\infty, \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \tag{4.11}$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1(0)+0} G(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda\to\lambda_k(0)+0} G(\lambda) = +\infty, \quad k = 0,2,3,\ldots \tag{4.12}$$

В силу неравенств (2.4) имеем $G(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1(0))$. Следовательно, из соотношения (3.5) следует, что $G(\lambda) > 0$ в интервале $(-\infty, \lambda_1(0))$. Так как $a_1 > 0$, то $a_1\lambda < 0$ в интервале $(-\infty, \lambda_1(0))$. Поэтому уравнение (4.10) не имеет решений в интервале S_1.

Согласно следствию 3.1 функция $G(\lambda)$ является вогнутой в интервале S_2. Кроме того, из (2.4), (4.11), (4.12) и равенств $G(\lambda_1(\pi/2)) = G(\lambda_2(\pi/2)) = 0$ вытекает, что $G(0) > 0$. Следовательно, уравнение (4.10) имеет два простых корня $\lambda_1 \in (\lambda_1(0), \lambda_1(\pi/2))$ и $\lambda_2 \in (0, \lambda_2(\pi/2))$.

Поскольку функция $G(\lambda)$ непрерывна в каждом интервале S_k, $k \in \mathbb{N}$, то из соотношений (4.11) и (4.12) следует, что функция $G(\lambda)$ каждое значение из $(-\infty, +\infty)$ принимает в некоторой точке интервала S_k, $k = 3,4,\ldots$ Поэтому уравнение (4.10) имеет по крайней мере одно решение в каждом интервале S_k, $k = 3, 4, \ldots$ Тогда в силу лемм 4.1–4.3 уравнение (4.10) имеет один простой корень λ_k в каждом интервале S_k, $k = 3, 4, \ldots$ Так как $a_1 > 0$ и функция $G(\lambda)$ принимает нулевое значение в единственной точке $\lambda_k(\pi/2) \in S_k$ при $k = 3, 4, \ldots,$ то $\lambda_k \in (\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(\pi/2))$ при $k = 3, 4, \ldots$ Теорема доказана.

Из [15, формула (5.7)] следуют асимптотические формулы

$$\sqrt[4]{\lambda_k(0)} = (k-1/2)\pi + O(1/k), \quad \sqrt[4]{\lambda_k(\pi/2)} = (k-3/4)\pi + O(1/k), \tag{4.13}$$

$$y_k^{(0)}(x) = \sin((k-1/2)\pi x) - \cos((k-1/2)\pi x) + e^{-(k-1/2)\pi x} + (-1)^k e^{-(k-1/2)\pi(1-x)} + O(1/k), \tag{4.14}$$

$$y_k^{(\pi/2)}(x) = \sin((k-3/4)\pi x) - \cos((k-3/4)\pi x) + e^{-(k-3/4)\pi x} + O(1/k), \tag{4.15}$$

при этом соотношения (4.14) и (4.15) выполняются равномерно по $x \in [0,1]$.

Теорема 4.2 *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = (k-3/2)\pi + O(1/k), \tag{4.16}$$

$$y_k(x) = \sin((k-3/2)\pi x) - \cos((k-3/2)\pi x) + e^{-(k-3/2)\pi x} + (-1)^{k+1} e^{-(k-3/2)\pi(1-x)} + O(1/k), \tag{4.17}$$

где соотношение (4.17) выполняется равномерно по $x \in [0,1]$.

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства [15, теорема 5.1].

5. Базисные свойства в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций задачи (1.1)–(1.4). Пусть $H = L_2(0,1) \bigoplus \mathbb{C}^2$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{v}) = (\{y, m, n\}, \{v, s, t\}) = (y, v)_{L_2} + a_1^{-1} m\bar{s} + a_2^{-1} n\bar{t}. \tag{5.1}$$

Рассматриваемая задача (1.1)–(1.4) сводится к задаче на собственные значения для линейного оператора L, действующего в пространстве H по правилу

$$L\hat{y} = L\{y, m, n\} = \{\ell(y), y''(1), Ty(1)\}$$

и имеющему область определения

$$D(L) = \{\{y(x), m\} : y \in W_2^4(0,1), \ \ \ell(y) \in L_2(0,1), \ \ y(0) = y'(0), \ \ m = a_1 y'(1), \ \ n = a_2 y(1)\},$$

являющейся всюду плотной в H. Оператор L является замкнутым в H с компактной резольвентой (см. [24]). Кроме того, задача на собственные значения для оператора L эквивалентна задаче (1.1)–(1.4): собственные значения оператора L и задачи (1.1)–(1.4) совпадают между собой (с учётом их кратности); между собственными векторами оператора L и собственными функциями задачи (1.1)–(1.4) можно установить взаимно-однозначное соответствие:

$$y_k(x) \ \leftrightarrow \ \hat{y}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}, \quad m_k = a_1 y_k'(1), \quad n_k = a_2 y_k(1).$$

Так как $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, то L является несамосопряжённым оператором в H. В этом случае определим оператор $J : H \to H$ следующим образом: $J\{y, m; n\} = \{y, m, -n\}$. Оператор J является унитарным и симметрическим в H со спектром, состоящим из двух собственных значений: -1 с кратностью единица и $+1$ с бесконечной кратностью. Следовательно, оператор J порождает пространство Понтрягина $\Pi_1 = L_2(0,1) \bigoplus \mathbb{C}^2$ с внутренним произведением [19]

$$[\hat{y}, \hat{v}] = (\hat{y}, \hat{v})_{\Pi_1} = (\{y, m, n\}, \{u, s, t\})_{\Pi_1} = (y, v)_{L_2} + a_1^{-1} m\bar{s} - a_2^{-1} n\bar{t}, \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Оператор L является J-самосопряжённым в пространстве* Π_1.

Доказательство. Оператор JL является самосопряжённым в H в силу [17, теорема 2.2]. Тогда J-самосопряжённость оператора L в Π_1 следует из [19, с. 62, свойство 1^0].

Теорема 5.2. *Пусть L^* – оператор, сопряжённый к оператору L в H. Тогда $L^* = JLJ$. Кроме того, система собственных векторов $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\hat{y}_k = \{y_k, m_k, n_k\}$, оператора L образует безусловный базис в H.*

Доказательство первой части этой теоремы следует из [19, с. 63, свойство 5^0], а второй части – из [20].

Для каждого элемента $\hat{y}_k = \{y_k, m_k, n_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, где $m_k = a_1 y_k'(1)$ и $n_k = a_2 y_k(1)$, системы корневых векторов $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора L справедливо равенство

$$L\hat{y}_k = \lambda_k \hat{y}_k, \tag{5.3}$$

а для элемента $\hat{v}_k^* = \{v_k^*, s_k^*, t_k^*\}$ системы собственных векторов $\{\hat{v}_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ оператора L^* – равенство

$$L^* \hat{v}_k^* = \lambda_k \hat{v}_k^*. \tag{5.4}$$

Вследствие теоремы 5.2 и соотношений (5.1), (5.3) и (5.4) имеем

$$\hat{v}_k^* = J\hat{y}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Так как L – J-самосопряжённый оператор в Π_1, то его собственные векторы $\hat{y}_k$ и $\hat{y}_l$, $k \neq l$, соответствующие собственным значениям λ_k и λ_l, являются J-ортогональными в Π_1, т.е.

$$[\hat{y}_k, \hat{y}_l] = 0. \tag{5.6}$$

В силу леммы 4.1 и равенства (4.4) получаем

$$G'(\lambda_k) - a_1 \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Отсюда, учитывая замечание 4.2 и соотношение (3.4), заключаем, что

$$\|y_k\|_{L_2}^2 + a_1 y_k'^2(1) - a_2 y_k^2(1) \neq 0,$$

а значит, согласно определению (5.2) справедливо неравенство

$$[\hat{y}_k, \hat{y}_k] = \|y_k\|_{L_2}^2 + a_1 y_k'^2(1) - a_2 y_k^2(1) \neq 0.$$

Непосредственным следствием соотношений (5.2), (5.5)–(5.7) является

Лемма 5.1. *Элемент $\hat{v}_k = \{v_k, s_k, t_k\}$ системы $\{\hat{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$, сопряжённой к системе $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$, определяется равенством*

$$\hat{v}_k = \delta_k^{-1} \hat{y}_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.8}$$

где $\delta_k = [\hat{y}_k, \hat{y}_k]$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть r, l – произвольные натуральные числа и

$$\Delta_{r,l} = \begin{vmatrix} s_r & s_l \\ t_r & t_l \end{vmatrix}. \tag{5.9}$$

Для упрощения записи введём следующие обозначения:

$$\sigma_{r,l} = a_1 a_2 \delta_r^{-1} \delta_l^{-1} y_r'(1) y_l'(1) \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta}_{r,l} = \left\{ \frac{y_r(1)}{y_r'(1)} - \frac{y_l(1)}{y_l'(1)} \right\}.$$

Тогда в силу замечания 4.2, формулы (5.8) и обозначения (5.9) получим

$$\sigma_{r,l} \neq 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{r,l} = \delta_r^{-1} \delta_l^{-1} \begin{vmatrix} m_r & m_l \\ n_r & n_l \end{vmatrix} = \sigma_{r,l} \tilde{\Delta}_{r,l}. \tag{5.10}$$

Поэтому из соотношений (5.10) следует, что имеет место эквивалентность

$$\Delta_{r,l} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta}_{r,l} \neq 0. \tag{5.11}$$

Теорема 5.3. *Если $\Delta_{r,l} \neq 0$, то система собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=1,k\neq r,l}^{\infty}$ задачи (1.1)–(1.4) образует базис в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причём при $p = 2$ этот базис является безусловным. Если $\Delta_{r,l} = 0$, то указанная система является не полной и не минимальной в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.*

Доказательство теоремы 5.3 при $p = 2$ проводится по схеме доказательства [9, теорема 4.1] с использованием теоремы 5.2 и соотношения (5.11), а при $p \in (1,\infty)$ и $p \neq 2$ – по схеме доказательства [13, теорема 5.1] с использованием формул (4.13)–(4.17).

Из доказательства теоремы 4.1 работы [9] следует, что система $\{u_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$, где

$$u_k(x) = v_k(x) - \Delta_{r,l}^{-1}(\Delta_{k,l}v_r(x) + \Delta_{r,k}v_l(x)),$$

является сопряжённой к системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$.

Замечание 5.1. В силу эквивалентности (5.11) и теоремы 5.3 условие $\tilde{\Delta}_{r,l} \neq 0$ является необходимым и достаточным для базисности в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$ задачи (1.1)–(1.4).

В следующей теореме получены условия, при которых $\tilde{\Delta}_{r,l} \neq 0$.

Теорема 5.4. *Имеют место следующие утверждения:*

i) существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых натуральных r и l $(r \neq l)$, бóльших k_0, справедливо соотношение $\tilde{\Delta}_{r,l} \neq 0$;

ii) для каждого фиксированного $r \in \mathbb{N}$ существует $k_r \in \mathbb{N}$ такое, что для любого натурального $l > k_r$ выполняется соотношение $\tilde{\Delta}_{r,l} \neq 0$.

Доказательство. Так как все, за исключением первого, собственные значения задачи (1.1)–(1.4) являются положительными, то в уравнении (1.1) положим $\lambda = \rho^4$, где $\rho > 0$. В силу [31, с. 58; с. 63–64, теорема 1 и формулы (27)–(29)] уравнение (1.1) имеет четыре линейно независимых решения $\varphi_k(x) = \varphi_k(x,\rho)$, $k = \overline{1,4}$, удовлетворяющие асимптотическим равенствам

$$\varphi_k^{(s)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^s e^{\rho\omega_k x}\left\{1 + \frac{1}{4\rho\omega_k}\int\limits_0^x q(t)dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right\}, \quad k = \overline{1,4}, \quad s = \overline{0,3}, \tag{5.12}$$

где $\omega_1 = -\omega_4 = -1$, $\omega_2 = -\omega_3 = -i$.

Для операторов U_i, $i = \overline{1,4}$, из граничных условий (1.2)–(1.4) имеем

$$U_1(\lambda,\varphi_k) = \varphi_k(0), \quad U_2(\lambda,\varphi_k) = \varphi_k'(0),$$

$$U_3(\lambda,\varphi_k) = \varphi_k''(1) - a_1\rho^4\varphi_k'(1) = -a_1\rho^4\varphi_k'(1)(1 + O(\rho^{-3})),$$

$$U_4(\lambda,\varphi_k) = \varphi_k'''(1) - q(1)\varphi_k'(1) - a_2\rho^4\varphi_k(1), \quad k = \overline{1,4}. \tag{5.13}$$

Собственная функция $y(x) = y(x,\rho)$, соответствующая собственному значению $\lambda = \rho^4$, может быть представлена в виде

$$y(x) = \begin{vmatrix} U_1(\lambda,\varphi_1) & U_1(\lambda,\varphi_2) & U_1(\lambda,\varphi_3) & U_1(\lambda,\varphi_4) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ U_3(\lambda,\varphi_1) & U_3(\lambda,\varphi_2) & U_3(\lambda,\varphi_3) & U_3(\lambda,\varphi_4) \\ U_4(\lambda,\varphi_1) & U_4(\lambda,\varphi_2) & U_4(\lambda,\varphi_3) & U_4(\lambda,\varphi_4) \end{vmatrix}. \tag{5.14}$$

Умножая вторую строку определителя (5.14) при $x = 1$ на $a_2\rho^4$ и складывая с четвёртой строкой, в силу (5.12) и (5.13) получаем

$$y(1) = -a_1\rho^8 e^{\rho}\left\{\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) & \varphi_4(0)e^{-\rho} \\ \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1)e^{-\rho} \\ \varphi_1'(1)\rho^{-1} & \varphi_2'(1)\rho^{-1} & \varphi_3'(1)\rho^{-1} & \varphi_4'(1)\rho^{-1}e^{-\rho} \\ \rho^{-3}T\varphi_1(1) & \rho^{-3}T\varphi_2(1) & \rho^{-3}T\varphi_3(1) & e^{-\rho}\rho^{-3}T\varphi_4(1) \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)\right\} =$$

$$= -a_1\rho^8 e^{\rho}\varphi_1(0)\left(\begin{vmatrix}\varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1)e^{-\rho}\\ \varphi_2'(1)\rho^{-1} & \varphi_3'(1)\rho^{-1} & \varphi_4'(1)\rho^{-1}e^{-\rho}\\ \varphi_2'''(1)\rho^{-3} & \varphi_3'''(1)\rho^{-3} & \varphi_4'''(1)\rho^{-3}e^{-\rho}\end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)\right) =$$

$$-a_1\rho^8 e^{\rho}\varphi_1(0)\left(\begin{vmatrix}1-\dfrac{q_0}{4\rho i} & 1+\dfrac{q_0}{4\rho i} & 1+\dfrac{q_0}{4\rho}\\ -i\left(1-\dfrac{q_0}{4\rho i}\right) & i\left(1+\dfrac{q_0}{4\rho i}\right) & 1+\dfrac{q_0}{4\rho}\\ i\left(1-\dfrac{q_0}{4\rho i}\right) & -i\left(1+\dfrac{q_0}{4\rho i}\right) & 1+\dfrac{q_0}{4\rho}\end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$y(1) = -4a_1 i\rho^8 e^{\rho}\left(1+\frac{q_0}{4\rho}\right)(1+O(\rho^{-2})), \tag{5.15}$$

где $q_0 = \int_0^1 q(x)\,dx$.

В силу (5.14) имеем

$$y'(x) = \begin{vmatrix}U_1(\lambda,\varphi_1) & U_1(\lambda,\varphi_2) & U_1(\lambda,\varphi_3) & U_1(\lambda,\varphi_4)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x)\\ U_3(\lambda,\varphi_1) & U_3(\lambda,\varphi_2) & U_3(\lambda,\varphi_3) & U_3(\lambda,\varphi_4)\\ U_4(\lambda,\varphi_1) & U_4(\lambda,\varphi_2) & U_4(\lambda,\varphi_3) & U_4(\lambda,\varphi_4)\end{vmatrix}. \tag{5.16}$$

Положим в определителе (5.16) $x = 1$, затем умножая вторую строку полученного определителя на $a_1\rho^4$ и складывая с третьей строкой и умножая вторую его строку на $q(1)$ и складывая её с четвёртой строкой, в силу (5.12) и (5.13) будем иметь

$$y'(1) = \begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) & \varphi_4(0)\\ \varphi_1'(1) & \varphi_2'(1) & \varphi_3'(1) & \varphi_4'(1)\\ \varphi_1''(1) & \varphi_2''(1) & \varphi_3''(1) & \varphi_4''(1)\\ \varphi_1'''(1)-a_2\rho^4\varphi_1(1) & \varphi_2'''(1)-a_2\rho^4\varphi_2(1) & \varphi_3'''(1)-a_2\rho^4\varphi_3(1) & \varphi_4'''(1)-a_2\rho^4\varphi_4(1)\end{vmatrix} =$$

$$= -a_2\rho^7 e^{\rho}\begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) & \varphi_4(0)e^{-\rho}\\ \varphi_1'(1)\rho^{-1} & \varphi_2'(1)\rho^{-1} & \varphi_3'(1)\rho^{-1} & \varphi_4'(1)\rho^{-1}e^{-\rho}\\ \varphi_1''(1)\rho^{-2} & \varphi_2''(1)\rho^{-2} & \varphi_3''(1)\rho^{-2} & \varphi_4''(1)\rho^{-2}e^{-\rho}\\ \varphi_1(1)-\dfrac{\varphi_1'''(1)}{a_2\rho^4} & \varphi_2'''(1)-\dfrac{\varphi_2'''(1)}{a_2\rho^4} & \varphi_2'''(1)-\dfrac{\varphi_2'''(1)}{a_2\rho^4} & \left(\varphi_2'''(1)-\dfrac{\varphi_2'''(1)}{a_2\rho^4}\right)e^{-\rho}\end{vmatrix} =$$

$$= -a_2\rho^7 e^{\rho}\varphi_1(0)\left(\begin{vmatrix}=\varphi_2'(1) & \varphi_3'(1) & \varphi_4'(1)e^{-\rho}\\ \varphi_2''(1)\rho^{-2} & \varphi_3''(1)\rho^{-2} & \varphi_4''(1)\rho^{-2}e^{-\rho}\\ \varphi_2'''(1)-\dfrac{\varphi_2'''(1)}{a_2\rho^4} & \varphi_2'''(1)-\dfrac{z_2'''(1)}{a_2\rho^4} & (\varphi_2'''(1)-\dfrac{z_2'''(1)}{a_2\rho^4})e^{-\rho}\end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)\right) =$$

$$= -a_2\rho^7 e^{\rho} z_1(0)\left(\begin{vmatrix}-i(1-q_0(4\rho i)^{-1}) & i(1+q_0(4\rho i)^{-1}) & 1+q_0(4\rho)^{-1}\\ -(1-q_0(4\rho i)^{-1}) & -(1+q_0(4\rho i)^{-1}) & 1+q_0(4\rho)^{-1}\\ 1-\dfrac{q_0-4/a_2}{4\rho i} & 1+\dfrac{q_0-4/a_2}{4\rho i} & 1+\dfrac{q_0-4/a_2}{4\rho}\end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right),$$

откуда следует, что

$$y'(1) = -4a_2 i\rho^7 e^{\rho}\left(1+\frac{q_0}{4\rho}\right)\left(1-\frac{1}{a_2\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right). \tag{5.17}$$

Из асимптотических представлений (5.15) и (5.17) получаем

$$\frac{y(1)}{y'(1)} = \frac{a_1}{a_2}\rho\left(1+\frac{1}{a_2\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right), \tag{5.18}$$

В силу асимптотических формул (5.18) и (4.16) существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых натуральных $r, l > k_0$, $r \neq l$ (не нарушая общности, считаем, что $r > l$) выполняются соотношения

$$\tilde{\Delta}_{r,l} = \frac{y_r(1)}{y_r'(1)} - \frac{y_l(1)}{y_l'(1)} = \frac{a_1}{a_2}\rho_r\left(1 + \frac{1}{a_2\rho_r} + O(r^{-2})\right) - \frac{a_1}{a_2}\rho_l\left(1 + \frac{1}{a_2\rho_l} + O(l^{-2})\right) =$$

$$= \frac{a_1}{a_2}\left((r-3/2)\pi + \frac{1}{a_2} + O(r^{-1})\right) - \frac{a_1}{a_2}\left((l-3/2)\pi + \frac{1}{a_2} + O(l^{-1})\right) > \frac{a_1}{a_2}\left((r-l)\pi - \frac{K}{r} - \frac{K}{l}\right) > 0,$$

где K – некоторая положительная константа.

Доказательство утверждения (ii) теоремы непосредственно следует из асимптотических формул (5.18) и (4.16). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М., 1978.
2. *Руссаковский Е.М.* Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия // Функц. анализ и его приложения. 1975. Т. 6. № 4. С. 91–92.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* О особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 1. С. 20–24.
5. *Керимов Н.Б., Мирзоев В.С.* О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. № 5. С. 1041–1045.
6. *Капустин Н.Ю.* О спектральной задаче из математической модели процесса крутильных колебаний стержня со шкивами на концах // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1143–1145.
7. *Алиев З.С.* О базисных свойствах корневых функций одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях // Докл. РАН. 2013. Т. 87. № 2. С. 137–139.
8. *Керимов Н.Б., Поладов Р.Г.* Базисные свойства системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Докл. РАН. 2013. Т. 442. № 7. С. 14–19.
9. *Алиев З.С., Дуньямалиева А.А.* Дефектная базисность системы корневых функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1249–1266.
10. *Aliyev Z.S., Dunyamaliyeva A.A, Mehraliyev Y.T.* Basis properties in L_p of root functions of Sturm–Liouville problem with spectral parameter-dependent boundary conditions // Mediterr. J. Math. 2017. V. 14. № 3. P. 1–23.
11. *Керимов Н.Б.* О базисных свойствах в L_p оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 148–157.
12. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. 2006. Т. 197. № 10. С. 1467–1487.
13. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.
14. *Aliyev Z.S.* Basis properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition // Cent. Eur. J. Math. 2010. V. 8. № 2. P. 378–388.
15. *Алиев З.С.* Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 766–777.
16. *Aliyev Z.S., Guliyeva S.B.* Properties of natural frequencies and harmonic bending vibrations of a rod at one end of which is concentrated inertial load // J. Differ. Equat. 2017. V. 263. № 9. P. 5830–5845.
17. *Binding P.A., Browne P.J.* Application of two parameter eigencurves to Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1995. V. 125. P. 1205–1218.

18. *Aliyev Z.S., Allahverdizada F.I.* Some spectral properties of the boundary value problem with spectral parameter in the boundary conditions // Proc. Inst. Math. and Mech. Nat. Acad. Sci. Azerbaijan. 2014. V. 40. № 2. P. 52–64.
19. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G-метрикой // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 4. С. 43–92.
20. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Критерий полноты и базисности корневых векторов вполне непрерывного J-самосопряжённого оператора в пространстве Понтрягина Π_χ // Мат. исследования. 1971. Т. 6. № 1. С. 158–161.
21. *Banks D.O., Kurowski G.J.* A Prufer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces // J. Differ. Equat. 1977. V. 24. P. 57–74.
22. *Kerimov N.B., Aliyev Z.S.* On oscillation properties of the eigenfunctions of a fourth order differential operator // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. 2005. V. 25. № 4. P. 63–76.
23. *Kerimov N.B., Aliyev Z.S.* The oscillation properties of the boundary value problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. 2005. V. 25. № 7. P. 61–68.
24. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
25. *Textorius B.* Minimaxprinzipe zur Bestimmung der Eigenverte J-nichtnegativer Operatoren // Math. Scand. 1974. V. 35. P. 105–114.
26. *Phillips R.S.* A minimax characterization for the eigenvalues of a positive symmetric operator in a space with an indefinite metric // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1970. V. 17. P. 51–59.
27. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л., 1951.
28. *Гурвиц А, Курант Р.* Теория функций. М., 1968.
29. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., 1984.
30. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
31. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

Бакинский государственный университет, Азербайджан,
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
г. Баку, Азербайджан,
Университет Хазар, г. Баку, Азербайджан

Поступила в редакцию ??.??.2019 г.
После доработки ??.??.2019 г.
Принята к публикации ??.??.2019 г.