**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ**
**И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**
**ФИЗИКА**
**Том 198, № 2**
**февраль, 2019**

 **Д. Н. Бозкурт[*], И. Б. Гахраманов[†‡§]**

# ПЕНТАГОННЫЕ ТОЖДЕСТВА, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСЧЕТАХ В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Статистические суммы трехмерных $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных калибровочных теорий на различных многообразиях можно выразить через $q$-гипергеометрические интегралы. Путем сравнения статистических сумм трехмерных зеркальных дуальных теорий выведены сложные интегральные тождества. В некоторых случаях эти тождества можно представить в виде пентагонных соотношений. С помощью так называемого $(3d$-$3d)$-соответствия эти тождества часто интерпретируются как движение Пахнера 3-2 для триангулированных многообразий. Еще одним важным с точки зрения физических перспектив приложением пентагонных тождеств является возможность их использования для построения новых решений квантового уравнения Янга–Бакстера.

**Ключевые слова:** пентагонное тождество, точные результаты в суперсимметричных калибровочных теориях, гипергеометрические интегралы.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9558

*Памяти академика Людвига Дмитриевича Фаддеева*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассматриваем некоторые пентагонные соотношения, возникающие при вычислениях в суперсимметричной калибровочной теории. Пентагонные тождества появляются во многих областях современной математической физики, таких как точно решаемые модели, двумерная конформная теория поля, алгебры Хопфа, топологические теории поля, инварианты узлов и т. д. (например, см. работы [1]–[3] и имеющиеся в них ссылки).

Вычисление статистической суммы суперсимметричных калибровочных теорий на компактных многообразиях можно свести к матричным интегралам с помощью

[*]Koç University, Istanbul, Turkey

[†]Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, Turkey. E-mail: ilmar.gh@gmail.com

[‡]Khazar University, Baku, Azerbaijan

[§]Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute), Potsdam, Germany

техники суперсимметричной локализации [4]. В случае трехмерных суперсимметричных калибровочных теорий эти матричные интегралы можно выразить через $q$-гипергеометрические интегралы или суммы. Ключевым моментом является то, что, изучая статистические суммы суперсимметричных дуальных теорий, можно получить новые сложные тождества для специальных функций такого типа. В настоящей работе рассмотрены такие тождества, а именно соотношения в виде пятичленов, или так называемые пентагонные соотношения.

Типичным примером пентагонного тождества, которое возникает из суперсимметричных калибровочных теорий, является равенство статистических сумм трехмерных $\mathcal{N}=2$ зеркальных дуальных теорий, имеющее следующий вид [3], [5]–[10]:

$$\oint d\mu\, B_{\mathrm{c}} B_{\mathrm{c}} = B_{\mathrm{c}} B_{\mathrm{c}} B_{\mathrm{c}}, \tag{1}$$

где интеграл берется по калибровочной активности $U(1)$, а $B_{\mathrm{c}}$ – вклад от кирального мультиплета (или комбинация таких вкладов).

Следуя работе [11], назовем пентагонным тождеством соотношение, которое можно интерпретировать как движение Пахнера 2-3 [12], [13] для триангулированных 3-многообразий. Здесь мы приводим некоторые примеры пентагонных соотношений, имеющих отношение к суперсимметричным статистическим суммам на многообразиях $\mathbb{S}^3_b$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{RP}^2\times\mathbb{S}^1$.

Пятичленные соотношения в суперсимметричных калибровочных теориях интересны со следующей точки зрения. Недавно было предложено соотношение, названное ($3d$-$3d$)-соответствием [6], [7] (также см. работы [14]–[16]) аналогично АГТ-соответствию [17]. Основная идея заключается в том, что 3-многообразие $M_3$ можно связать с трехмерной $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теорией, которую обозначим как $T[M_3]$, полученной из скрученной компактификации шестимерной $\mathcal{N}=(2,0)$ теории на 3-многообразии $M_3$. Это соответствие переносит идеальную триангуляцию 3-многообразия в зеркальную симметрию трехмерных суперсимметричных теорий. Независимость соответствующего инварианта 3-многообразия от выбора триангуляции отвечает равенству статистических сумм зеркальных дуальных теорий. В этом контексте тождество (1) содержит движение Пахнера 3-2 для 3-многообразия.

В настоящей работе дан обзор некоторых пентагонных тождеств, связанных с расчетами в суперсимметричных калибровочных теориях, а также приведено несколько новых результатов. Важность пентагонных тождеств[1)] в математической физике главным образом заключается в том, что их можно применить к интегрируемым моделям, квантовым группам и теории узлов; это впервые было отмечено Фаддеевым [18], [19] и его коллегами [11], [20]–[23].

Настоящая статья имеет следующую структуру. В разделе 2 дан обзор техники локализации, позволяющей точно вычислять статистические суммы суперсимметричных теорий. В разделе 3 мы напоминаем основные сведения о трехмерной зеркальной симметрии. В разделе 4 рассмотрены пентагонные тождества. В разделе 5 приведены некоторые заключительные замечания и сформулированы нерешенные проблемы.

---

[1)] Заметим, что в работах Фаддеева пентагонное тождество относится к операторным уравнениям, а не к интегральным соотношениям, которые используются в настоящей работе.

## 2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ

В этом разделе дан обзор основных идей суперсимметричной локализации[2)]. Подробнее эта тема рассмотрена в оригинальной работе Пестуна [4] и в обзорных статьях [25]–[27].

В настоящей работе используются статистические суммы

$$Z_{M_3} = \int D\phi\, e^{-S[\phi]}, \tag{2}$$

суперсимметричных калибровочных теорий на компактном многообразии[3)] $M_3$, где символ $\phi$ означает все поля теории. В качестве компактного многообразия рассматриваются многообразия $\mathbb{S}_b^3$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1$. Так называемая суперсимметричная техника локализации [4] позволяет точно вычислить статистическую сумму (2) на таких многообразиях. Основная идея суперсимметричной локализации заключается в следующем[4)].

Предположим, что мы рассматриваем суперсимметричную калибровочную теорию на многообразии $M$ с фермионным оператором[5)] $Q$. Из суперсимметричной инвариантности следует, что

$$QS = 0. \tag{3}$$

Тогда интеграл по путям можно переписать в виде $Z(t) = \int D\phi\, e^{-S[\phi]-tQV[\phi]}$, где $\delta_Q V = 0$, $V$ – некоторый функционал полей, а $\delta_Q$ – суперсимметричное преобразование, удовлетворяющее формуле (3). Можно показать, что если мера $Q$-инвариантна[6)], то статистическая сумма $Z$ не зависит от параметра $t$, а при больших $t$ вклад в контурный интеграл появляется только вблизи $\delta_Q V[\phi_0] = 0$: $Z = \int D\phi_0\, e^{-S[\phi_0]} Z_{\text{1-loop}}[\phi_0]$.

## 3. ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

В этом разделе обсуждается зеркальная симметрия в трехмерных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях. На ней мы в основном и сосредотачиваемся при выводе пентагонных тождеств.

Трехмерная зеркальная симметрия впервые была введена для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных калибровочных теорий в работе [28] и была расширена до $\mathcal{N} = 2$ калибровочных теорий в работе [29]. Простейшим примером зеркальной симметрии $\mathcal{N} = 2$ является дуальность между суперсимметричной квантовой электродинамикой с одним ароматом и свободной теорией Весса–Зумино [28], [29], которые заданы в УФ-области и перетекают в одну и ту же ИК-фиксированную точку.

1. Суперсимметричная $\mathcal{N} = 2$ квантовая электродинамика имеет один аромат, состоящий из двух киральных полей $Q$, $\widetilde{Q}$ и одного векторного мультиплета $V$. Эта

---

2) Техника локализации имеет долгую историю в топологической теории поля. Ее частным примером является инстантонный вклад, вычисленный с помощью омега-деформации [24].

3) Чтобы сделать контурный интеграл корректно определенным, нужно рассмотреть компактное пространство, которое обеспечивает инфракрасное обрезание.

4) Заметим, что в трехмерном случае суперсимметричная локализация технически проще, поскольку отсутствуют инстантонные поправки. Даже сумма по монопольным зарядам на $S^2 \times S^1$ проще суммы по инстантонам в $S^4$.

5) Это некоторая линейная комбинация суперзарядов.

6) Это означает, что суперсимметрия не нарушена в вакууме.

теория обладает дополнительными глобальными $U(1)$-симметриями: одна из них, $U(1)_J$-симметрия, топологическая, а другая, $U(1)_A$-симметрия, является симметрией аромата (см. табл. 1).

Таблица 1. Заряды в суперсимметричной квантовой электродинамике.

| | $U(1)$ | $U(1)_{\mathrm{J}}$ | $U(1)_{\mathrm{A}}$ |
|---|---|---|---|
| $Q$ | 1 | 0 | 1 |
| $\widetilde{Q}$ | $-1$ | 0 | 1 |

2. Зеркальная теория, свободная модель Весса–Зумино[7)], является теорией, содержащей три киральных поля $q$, $\tilde{q}$ и $S$, которые взаимодействуют посредством трилинейного суперпотенциала $W = \tilde{q}Sq$. В этой теории есть две глобальные $U(1)$-симметрии, названные $U(1)_{\mathrm{V}}$- и $U(1)_{\mathrm{A}}$-симметриями [30] (см. табл. 2).

Таблица 2. Заряды в свободной теории Весса–Зумино.

| | $U(1)_{\mathrm{V}}$ | $U(1)_{\mathrm{A}}$ |
|---|---|---|
| $q$ | 1 | $-1$ |
| $\tilde{q}$ | $-1$ | $-1$ |
| $S$ | 0 | 2 |

В рамках зеркальной симметрии можно также отождествить $U(1)_{\mathrm{J}}$ - и $U(1)_{\mathrm{A}}$-симметрии симметричной квантовой электродинамики с $U(1)_{\mathrm{V}}$ - и $U(1)_{\mathrm{A}}$-симметриями модели Весса–Зумино соответственно.

## 4. ПЕНТАГОННЫЕ ТОЖДЕСТВА

Поскольку теории, рассмотренные в предыдущем разделе, являются зеркально дуальными друг другу, суперсимметричные статистические суммы должны совпадать. В статистическую сумму суперсимметричной квантовой электродинамики, которая обсуждалась выше, вносят вклад два кварка, а статистическая сумма зеркального партнера, теории Весса–Зумино, содержит вклады от одного мезона и двух синглетов.

Рассмотрим сначала трехмерную статистическую сумму на сплющенной сфере[8)] $S_b^3$. Статистическую сумму на сплющенной сфере можно записать в виде гиперболических гипергеометрических функций. Зеркальная дуальность дает следующее

[7)] В литературе эта теория часто называется $XYZ$-моделью.

[8)] Трехмерная сферическая статистическая сумма впервые изучалась в работе [31] для $\mathcal{N} > 2$. Обобщение на случай $\mathcal{N} = 2$ сделано в статье [32], для круглой сферы – в статье [33] и для сплющенной сферы – в работе [34].

пентагонное тождество[9)] [6]:

$$\int s_b(y-z)s_b(y+z)\,dz = s_b\left(2y-\frac{iQ}{2}\right)s_b\left(\frac{iQ}{2}-y\right)s_b\left(\frac{iQ}{2}-y\right), \tag{4}$$

где левая часть является статистической суммой суперсимметричной квантовой электродинамики, а правая – статистической суммой дуальной теории. Здесь функция двойного синуса[10)] определяется по формуле

$$s_b(x) = e^{-i\pi x^2/2}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1+e^{2\pi bx+2\pi ib^2(j-1/2)}}{1+e^{2\pi b^{-1}x+2\pi ib^{-2}(1/2-j)}}.$$

Пентагонное тождество (4) хорошо известно в литературе и появляется в различных областях, главным образом – в теории Лиувилля.

Далее рассмотрим статистическую сумму $S^2\times S^1$. Статистическую сумму можно вычислить с помощью техники локализации, приводящей к матричному интегралу в терминах основных гипергеометрических функций. Зеркальная симметрия приводит к следующему тождеству для статистических сумм[11)]:

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}}\oint\frac{dz}{2\pi iz}\,(-w)^s z^{n-s}\frac{(z\alpha^{-1}q^{(m+s)/2+3/4};q)_\infty}{(z^{-1}\alpha q^{(m+s)/2+1/4};q)_\infty}\frac{(z\alpha^{-1}q^{(m-s)/2+3/4};q)_\infty}{(z\alpha q^{(m-s)/2+1/4};q)_\infty} =$$
$$= (-w)^n\frac{(\alpha wq^{(m+n)/2+3/4};q)_\infty}{(\alpha^{-1}w^{-1}q^{(m-n)/2+1/4};q)_\infty}\frac{(\alpha wq^{(m-n)/2+3/4};q)_\infty(\alpha^{-2}q^{m+1/2};q)_\infty}{(\alpha^{-1}wq^{(m+n)/2+1/4};q)_\infty(\alpha^2q^{m+1/2};q)_\infty}, \tag{5}$$

где $\alpha$ и $m$ означают активность и заряд монополя для аксиальной $U(1)_{\mathrm{A}}$-симметрии, $\omega$ и $n$ означают соответственно активность и заряд монополя для топологической $U(1)_{\mathrm{J}}$-симметрии. Активность $z$ и дискретный параметр $s$ обозначают магнитный заряд, соответствующий калибровочной группе $U(1)$.

Пусть функция $\mathcal{B}(m;q,z)$ такова, что $\mathcal{B}(m,z) = (zq^{m/2+1/2};q)_\infty/(z^{-1}q^{m/2};q)_\infty$. Тогда интегральное тождество (5) можно записать в виде пентагонного тождества [8], [9], [30], [38]

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}}\oint\frac{dz}{2\pi iz}\,(-w)^s z^{n-s}\mathcal{B}(m-s,z\alpha^{-1}q^{1/4})\mathcal{B}(m+s,z^{-1}\alpha^{-1}q^{1/4}) =$$
$$= (-w)^n\mathcal{B}(m+n,w\alpha q^{1/4})\mathcal{B}(m-n,w^{-1}\alpha q^{1/4})\mathcal{B}\left(m+\frac{1}{2},\alpha^{-2}q^{1/4}\right).$$

Еще один простой, но более интересный пример пентагонного тождества возникает из равенства статистических сумм в многообразии $\mathbb{RP}^2\times\mathbb{S}^1$. Согласно зеркальной

[9)] Заметим, что равенство статистических сумм остается верным для произвольного $R$-заряда кварка в ИК-фиксированной точке, поэтому ее не нужно конкретизировать.

[10)] Функция двойного синуса является вариантом некомпактного квантового дилогарифма Фаддеева [18]. Существуют различные обозначения и модификации для этой функции, соотношения между некоторыми из них можно найти в работах [35]–[37].

[11)] Это тождество сначала было доказано для случая $m=0$ [30].

симметрии имеем следующее интегральное тождество [39]–[41]:

$$q^{1/8}\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}\oint_{C_0}\frac{dz}{2\pi iz}\,z^s\sum_{m=0}^{1}a^{-1/2+m}q^{-1/4+m/2}\frac{(z^{-1}aq^{1+m};q^2)_\infty(zaq^{1+m};q^2)_\infty}{(za^{-1}q^m;q^2)_\infty(z^{-1}a^{-1}q^m;q^2)_\infty}=$$
$$=q^{-1/8}a^{-1/2-|\tilde{s}|}\frac{(a^{-1}q^{1/2+|\tilde{s}|};q^2)_\infty}{(aq^{1/2+|\tilde{s}|};q^2)_\infty}\frac{(a^{-1}q^{3/2+|\tilde{s}|};q^2)_\infty}{(aq^{3/2+|\tilde{s}|};q^2)_\infty}\frac{(a^2q;q^2)_\infty}{(a^{-2};q^2)_\infty}.$$

Вводя функции $\mathcal{B}(z,m;q^2)=z^{-1/4+m/2}q^{-1/8+m/4}(zq^{m+1};q^2)_\infty/(z^{-1}q^m;q^2)_\infty$, находим нетривиальное пентагонное соотношение

$$\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}\oint_{C_0}\frac{dz}{2\pi iz}\,z^s\sum_{m=0}^{1}\mathcal{B}(z^{-1}a,m;q^2)\mathcal{B}(za,m;q^2)=$$
$$=\mathcal{B}(a^{-1}q^{-1/2},|\tilde{s}|;q^2)\mathcal{B}(a^{-1}q^{-1/2},|\tilde{s}|+1;q^2)\mathcal{B}(a^2,0;q^2).$$

**4.1. Другие пентагонные тождества.** Приведем некоторые другие примеры пентагонных тождеств, полученных из расчетов в суперсимметричной калибровочной теории. Эти интегральные пентагонные тождества рассмотрены в [5], [8], [9].

Чтобы получить пентагонное тождество, рассмотрим следующую дуальность. Первой теорией является трехмерная $\mathcal{N}=2$ суперсимметричная теория поля с калибровочной симметрией $U(1)$ и группой ароматов $SU(3)\times SU(3)$, половина киральных полей действует в фундаментальном представлении калибровочной группы, а другая половина – в антифундаментальном представлении. Дуальная ей теория имеет девять киральных мультиплетов без калибровочных степеней свободы. Суперсимметричная дуальность приводит к интегральному тождеству для гиперболических гипергеометрических функций [5], [42], [43]

$$\int du\prod_{i=1}^{3}s_b\biggl(\frac{iQ}{2}+a_i+u\biggr)s_b\biggl(\frac{iQ}{2}+b_i-u\biggr)=\prod_{i,j=1}^{3}s_b\biggl(\frac{iQ}{2}+a_i+b_j\biggr) \tag{6}$$

с условием балансировки $\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i)=-iQ$. Введем следующую функцию:

$$\mathcal{B}(x,y)=\frac{s_b(x+iQ/2)s_b(y+iQ/2)}{s_b(x+y+iQ/2)}.$$

Тогда из выражения (6) легко понять, что функция $\mathcal{B}(x,y)$ удовлетворяет пентагонному тождеству [5]

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{B}(a_i-u,b_i+u)\,du=\mathcal{B}(a_2+b_1,a_3+b_2)\mathcal{B}(a_1+b_2,a_3+b_1).$$

Можно выписать похожее пентагонное соотношение в терминах основных гипергеометрических функций. Для этого рассмотрим статистические суммы $S^2\times S^1$ для упомянутых дуальных теорий. В результате получаем формулу [9]

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\oint\frac{dz}{2\pi iz}(-q)^{1/2\sum_{i=1}^{3}(|m_i+m|/2+|n_i-m|/2)}z^{-\sum_{i=1}^{3}(|m_i+m|/2-|n_i-m|/2)}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{3}a_i^{-|m_i+m|/2}b_i^{-|n_i-m|/2}\frac{(q^{1+|m_i+m|/2}(a_iz)^{-1};q)_\infty}{(q^{|m_i+m|/2}a_iz;q)_\infty}\frac{(q^{1+|n_i-m|/2}z/b_i;q)_\infty}{q^{|n_i-m|/2}(b_i/z;q)_\infty}=$$
$$=(-q)^{1/2\sum_{i,j=1}^{3}|m_i+n_j|/2}\prod_{i,j=1}^{3}(a_ib_j)^{-|m_i+n_j|/2}\frac{(q^{1+|m_i+n_j|/2}(a_ib_j)^{-1};q)_\infty}{(q^{|m_i+n_j|/2}a_ib_j;q)_\infty}\tag{7}$$

с условиями балансировки $\prod_{i=1}^{3}a_i=\prod_{i=1}^{3}b_i=q^{1/2}$ и $\sum_{i=1}^{3}n_i=\sum_{i=1}^{3}m_i=0$. Вновь вводя функции

$$\mathcal{B}_m[a,n;b,m]=(-q)^{|n|/4+|m|/4-|m+n|/4}a^{-|n|/2}b^{-|m|/2}(ab)^{|n+m|/2}\times$$
$$\times\frac{(q^{1+|n|/2}a^{-1};q)_\infty}{(q^{|n|/2}a;q)_\infty}\frac{(q^{1+|m|/2}b^{-1};q)_\infty}{(q^{|m|/2}b;q)_\infty}\frac{(q^{|n+m|/2}ab;q)_\infty}{(q^{1+|n+m|/2}(ab)^{-1};q)_\infty},$$

получаем интегральное пентагонное тождество в терминах $\mathcal{B}$:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\oint\frac{dz}{2\pi iz}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{B}[a_iz,n_i+m;b_iz^{-1},m_i-m]=$$
$$=\mathcal{B}[a_1b_2,n_1+m_2;a_3b_1;n_3+m_1]\mathcal{B}[a_2b_1,n_2+m_1;a_3b_2,n_3+m_2].$$

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе мы рассмотрели интегральные пентагонные тождества, которые появляются из расчетов в суперсимметричной калибровочной теории. Мы сосредоточились на примерах суперсимметричных дуальных теорий на различных многообразиях, статистические суммы которых можно представить в виде основных или гиперболических гипергеометрических интегралов.

Предполагается, что интегральные пентагонные тождества для статистических сумм многообразий $\mathbb{RP}^2\times\mathbb{S}^1$ соотносятся с некоторым инвариантом соответствующего 3-многообразия с помощью $(3d$-$3d)$-соответствия, которое связывает трехмерные $\mathcal{N}=2$ суперсимметричные теории и триангулированные 3-многообразия. В связи с этим было бы интересно найти интерпретацию пентагонного тождества в терминах движения Пахнера 3-2 для соответствующего 3-многообразия.

Тождества в терминах гиперболических гипергеометрических функций соответствуют инвариантам узлов [35], [44], которые также связаны с объемами гиперболических 3-многообразий [45] (также см. статью [46]). Было бы интересно установить соответствие между инвариантами узлов (например, с инвариантом Хиками) и представленными здесь результатами.

Наконец, упомянем интересную связь пентагонных тождеств с интегрируемыми моделями: тождества (6) и (7) можно представить в виде уравнения Янга–Бакстера (например, см. работы [35], [36], [47], [48]). Было бы интересно исследовать и расширить понимание этих соответствий.

**Благодарности.** Часть результатов докладывалась на международной конференции “Классические и квантовые интегрируемые системы ” в 2017 г. И. Б. Гахраманов благодарен организаторам конференции (особенно В. Спиридонову и П. Пятову) за приглашение и создание стимулирующей атмосферы. Также он выражает благодарность Х. Розенгрену, В. Спиридонову и А. Келсу за полезные обсуждения по теме статьи. В особенности авторы благодарны Ш. Джафарзаде и Д. Донмезу за обсуждения и ценные предложения по улучшению статьи.

## Список литературы

[1] J. Allman, R. Rimányi, *Quantum dilogarithm identities for the square product of A-type Dynkin quivers*, arXiv: 1702.04766.

[2] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, “Simplex and polygon equations”, *SIGMA*, **11** (2015), 042, 49 pp., arXiv: 1409.7855.

[3] I. Gahramanov, H. Rosengren, “Integral pentagon relations for 3d superconformal indices”, *String-Math* 2014 (Edmonton, Canada, June 9–13, 2014), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **93**, eds. V. Bouchard, C. Doran, S. Méndez-Diez, C. Quigley, AMS, Providence, RI, 2016, 165–173, arXiv: 1412.2926.

[4] V. Pestun, “Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops”, *Commun. Math. Phys.*, **313** (2012), 71–129, arXiv: 0712.2824.

[5] R. Kashaev, F. Luo, G. Vartanov, “A TQFT of Turaev–Viro type on shaped triangulations”, *Ann. Henri Poincaré*, **17**:5 (2016), 1109–1143, arXiv: 1210.8393.

[6] T. Dimofte, D. Gaiotto, S. Gukov, “Gauge theories labelled by three-manifolds”, *Commun. Math. Phys.*, **325**:2 (2014), 367–419, arXiv: 1108.4389.

[7] T. Dimofte, D. Gaiotto, S. Gukov, “3-Manifolds and 3*d* indices”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **17**:5 (2013), 975–1076, arXiv: 1112.5179.

[8] I. Gahramanov, H. Rosengren, “A new pentagon identity for the tetrahedron index”, *JHEP*, **11** (2013), 128, arXiv: 1309.2195.

[9] I. Gahramanov, H. Rosengren, “Basic hypergeometry of supersymmetric dualities”, *Nucl. Phys. B*, **913** (2016), 747–768, arXiv: 1606.08185.

[10] Y. Imamura, D. Yokoyama, “$S^3/Z_n$ partition function and dualities”, *JHEP*, **11** (2012), 122, arXiv: 1208.1404.

[11] Р. М. Кашаев, “Бета-пентагональные уравнения”, *ТМФ*, **181**:1 (2014), 73–85, arXiv: 1403.1298.

[12] U. von Pachner, “Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **57**:1 (1987), 69–86.

[13] U. Pachner, “P. L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings”, *Eur. J. Combin.*, **12**:2 (1991), 129–145.

[14] Д. В. Галахов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Смирнов, “О трехмерном обобщении соответствия Алдая–Гайотто–Тачикавы”, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 73–99, arXiv: 1104.2589.

[15] T. Dimofte, “3d superconformal theories from three-manifolds”, *New Dualities of Supersymmetric Gauge Theories*, ed. J. Teschner, Springer, Cham, 2016, 339–373, arXiv: 1412.7129.

[16] Y. Terashima, M. Yamazaki, “Semiclassical analysis of the 3*d*/3*d* relation”, *Phys. Rev. D*, **88**:2 (2013), 026011, arXiv: 1106.3066.

[17] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, “Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories”, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.

[18] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, “Quantum dilogarithm”, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:5 (1994), 427–434, arXiv: hep-th/9310070.

[19] Л. Д. Фаддеев, “Пентагон Волкова для модулярного квантового дилогарифма”, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:4 (2011), 65–71, arXiv: 1201.6464.

[20] A. Yu. Volkov, “Beyond the ‘pentagon identity’”, *Lett. Math. Phys.*, **39**:4 (1997), 393–397, arXiv: q-alg/9603003.

[21] A. Yu. Volkov, “Pentagon identity revisited I”, *Int. Math. Res. Notices*, **2012**:20 (2012), 4619–4624, arXiv: 1104.2267.

[22] R. M. Kashaev, S. M. Sergeev, “On pentagon, ten term, and tetrahedron relations”, *Commun. Math. Phys.*, **195**:2 (1998), 309–319, arXiv: q-alg/9607032.

[23] R. M. Kashaev, “On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmüller theory”, *Physics and Combinatorics* (Graduate School of Mathematics, Nagoya University, 21–26 August, 2000), eds. A. N. Kirillov, N. Liskova, World Sci., Singapore, 2001, 63–81, arXiv: math/0008148.

[24] N. A. Nekrasov, “Seiberg–Witten prepotential from instanton counting”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2003), 831–864, arXiv: hep-th/0206161.

[25] K. Hosomichi, “The localization principle in SUSY gauge theories”, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, **2015**:11 (2015), 11B101, 20 pp., arXiv: 1502.04543.

[26] B. Willett, “Localization on three-dimensional manifolds”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:44 (2017), 443006, arXiv: 1608.02958.

[27] S. Cremonesi, “Localization and supersymmetry on curved space”, *PoS(Modave2013)*, **201** (2013), 002, 39 pp.

[28] K. A. Intriligator, N. Seiberg, “Mirror symmetry in three-dimensional gauge theories”, *Phys. Lett. B*, **387**:3 (1996), 513–519, arXiv: hep-th/9607207.

[29] O. Aharony, A. Hanany, K. A. Intriligator, N. Seiberg, M. Strassler, “Aspects of $N = 2$ supersymmetric gauge theories in three-dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **499**:1–2 (1997), 67–99, arXiv: hep-th/9703110.

[30] A. Kapustin, B. Willett, *Generalized superconformal index for three dimensional field theories*, arXiv: 1106.2484.

[31] A. Kapustin, B. Willett, I. Yaakov, “Exact results for Wilson loops in superconformal Chern–Simons theories with matter”, *JHEP*, **03** (2010), 089, 29 pp., arXiv: 0909.4559.

[32] N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, “Notes on SUSY gauge theories on three-sphere”, *JHEP*, **03** (2011), 127, 14 pp., arXiv: 1012.3512.

[33] D. L. Jafferis, “The exact superconformal $R$-symmetry extremizes $Z$”, *JHEP*, **05** (2012), 159, 20 pp., arXiv: 1012.3210.

[34] N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, “SUSY gauge theories on squashed three-spheres”, *JHEP*, **05** (23), 014, arXiv: 1102.4716.

[35] V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, “Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities II. Orthogonal groups, knots, and vortices”, *Commun. Math. Phys.*, **325**:2 (2014), 421–486, arXiv: 1107.5788.

[36] I. Gahramanov, A. P. Kels, “The star-triangle relation, lens partition function, and hypergeometric sum/integrals”, *JHEP*, **02** (2017), 040, 40 pp., arXiv: 1610.09229.

[37] I. Gahramanov, S. Jafarzade, *Integrable lattice spin models from supersymmetric dualities*, arXiv: 1712.09651.

[38] C. Krattenthaler, V. Spiridonov, G. Vartanov, “Superconformal indices of three-dimensional theories related by mirror symmetry”, *JHEP*, **06** (2011), 008, 20 pp., arXiv: 1103.4075.

[39] A. Tanaka, H. Mori, T. Morita, “Superconformal index on $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1$ and mirror symmetry”, *Phys. Rev. D*, **91**:10 (2015), 105023, 24 pp., arXiv: 1408.3371.

[40] A. Tanaka, H. Mori, T. Morita, “Abelian $3d$ mirror symmetry on $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1$ with $N_f = 1$”, *JHEP*, **09** (2015), 154, 29 pp., arXiv: 1505.07539.

[41] H. Mori, A. Tanaka, “Varieties of Abelian mirror symmetry on $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1$”, *JHEP*, **02** (2016), 088, 24 pp., arXiv: 1512.02835.

[42] V. Spiridonov, “Elliptic beta integrals and solvable models of statistical mechanics”, *Algebraic Aspects of Darboux Transformations, Quantum Integrable Systems and Supersymmetric Quantum Mechanics*, Contemporary Mathematics, **563**, eds. P. B. Acosta-Humánez, F. Finkel, N. Kamran, P. J. Olver, AMS, Providence, RI, 2012, 181–211, arXiv: 1011.3798.

[43] S. Benvenuti, S. Pasquetti, “3d $\mathcal{N}=2$ mirror symmetry, pq-webs and monopole superpotentials”, *JHEP*, **08** (2016), 136, 43 pp., arXiv: 1605.02675.

[44] K. Hikami, “Generalized volume conjecture and the $A$-polynomials: the Neumann–Zagier potential function as a classical limit of quantum invariant”, *J. Geom. Phys.*, **57**:9 (2007), 1895–1940, arXiv: math/0604094.

[45] R. M. Kashaev, “The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm”, *Lett. Math. Phys.*, **39**:3 (1997), 269–275.

[46] D. Gang, N. Kim, S. Lee, “Holography of wrapped M5-branes and Chern–Simons theory”, *Phys. Lett. B*, **733** (2014), 316–319, arXiv: 1401.3595.

[47] V. V. Bazhanov, A. P. Kels, S. M. Sergeev, “Quasi-classical expansion of the star-triangle relation and integrable systems on quad-graphs”, *J. Phys. A*, **49**:46 (2016), 464001, arXiv: 1602.07076.

[48] S. Jafarzade, Z. Nazari, “A new integrable Ising-type model from 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ dualities”, arXiv: 1709.00070.

Поступила в редакцию 20.02.2018,
после доработки 20.02.2018,
принята к публикации 1.06.2018