Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 1, 1975, 31—34.

ЧИСЛОВОЙ ОБРАЗ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ И КРАТНАЯ ПОЛНОТА ПО М. В. КЕЛДЫШУ

Г. А. Исаев

§ 1. Числовой образ операторных пучков

Рассмотрим оператор-функцию $A(\lambda)$, определенную в некоторой области $\mathscr{D}$ комплексной плоскости со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов $[\mathscr{H}]$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть S_1 — единичная сфера пространства $\mathscr{H}$.

Определение. *Числовым образом* оператор-функции $A(\lambda)$: $\mathscr{D} \to [\mathscr{H}]$ назовем множество

$$W[A(\lambda)] \equiv \{\lambda \in \mathscr{D}: \exists \varphi \in S_1, \ (A(\lambda)\varphi, \varphi) = 0\}.$$

Другими словами, числовой образ оператор-функции $A(\lambda)$ — это множество корней сужения на единичную сферу S_1 квадратичной формы, ассоциированной с $A(\lambda)$.

Числовой образ оператор-функции вида $\lambda I - A$, где $A \in [\mathscr{H}]$, совпадает с известным понятием числового образа оператора A (см. [7]).

Очевидно, S_1 можно заменять на $\mathscr{H} \setminus \{0\}$.

Резольвентным множеством оператор-функции $A(\lambda)$ называется множество $\rho[A(\lambda)] \equiv \{\lambda \in \mathscr{D} : \exists A^{-1}(\lambda) \in [\mathscr{H}]\}$, при этом $A^{-1}(\lambda) : \rho[A(\lambda)] \to [\mathscr{H}]$ называется *резольвентой* оператор-функции $A(\lambda)$.

Спектром оператор-функции $A(\lambda)$ называется множество $\sigma[A(\lambda)] = \mathscr{D} \setminus \rho[A(\lambda)]$. Точка $\lambda_0 \in \mathscr{D}$ называется *собственным числом* $A(\lambda)$, если $\ker A(\lambda_0) \not\equiv \{0\}$, при этом каждый вектор $\varphi \in \ker A(\lambda_0) \setminus \{0\}$ называется *собственным элементом* $A(\lambda)$, *отвечающим собственному числу* λ_0. Собственные числа всегда принадлежат спектру $\sigma[A(\lambda)]$ и числовому образу $W[A(\lambda)]$.

Здесь основное внимание будет уделено полиномиальным операторным пучкам вида $A(\lambda) = I + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^n A_n$. *Союзным* (или *двойственным*) с $A(\lambda)$ пучком будем называть $A_c(\lambda) \equiv \lambda^n A(1/\lambda) = \lambda^n I + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + A_n$. Нумеруя корни полинома $(A_c(\lambda)\varphi, \varphi)$, $\varphi \in S_1$, получим последовательность функционалов $p_1(\varphi), p_2(\varphi), \ldots, p_n(\varphi)$, определенных на S_1. Обозначим области значений этих функционалов соответственно через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Очевидно,

$$W[A_c(\lambda)] = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j.$$

Имеет место следующая простая и важная для дальнейшего

Лемма 1. *Замыкание числового образа $W[A_c(\lambda)]$ содержит спектр пучка $A_c(\lambda)$, и для $\lambda \notin \overline{W[A_c(\lambda)]}$ имеет место оценка*

$$\|A_c^{-1}(\lambda)\| \leqslant \left[\prod_{j=1}^{n} d(\lambda, \Delta_j)\right]^{-1},$$

где $d(\lambda, \Delta_j)$ — расстояние точки λ от множества Δ_j.

Доказательство вытекает из следующих двух неравенств:

$$\|A_c(\lambda)\varphi\| \geqslant |(A_c(\lambda)\varphi, \varphi)| = \prod_{j=1}^{n} |\lambda - p_j(\varphi)| \geqslant \prod_{j=1}^{n} d(\lambda, \Delta_j),$$

$$\|[A_c(\lambda)]^*\varphi\| \geqslant |(A_c(\lambda)\varphi, \varphi)| \geqslant \prod_{j=1}^{n} d(\lambda, \Delta_j),$$

здесь $\lambda \notin \overline{W[A_c(\lambda)]}$ и $\varphi \in S_1$.

В случае пучка $I - \lambda A$ получается известное предложение теории операторов (см. [2], лемма 6.1).

Доказанная лемма может помочь при изучении различных вопросов, связанных с оценкой резольвенты $A^{-1}(\lambda)$ полиномиального пучка $A(\lambda)$.

Замечание. Лемма 1 в своей первой части ($\sigma \subset \overline{W}$) имеет далеко идущее обобщение для различных оператор-функций.

§ 2. θ-секториальные операторные пучки

Сейчас мы выделим важный класс полиномиальных пучков $A(\lambda) = I + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^n A_n$.

Определение. Пучок $A(\lambda)$ назовем θ-*секториальным*, если числовой образ $W[A(\lambda)]$ расположен внутри непересекающихся углов раствора не больше $\theta < 2\pi$.

Пусть $\mathscr{C}_\infty$ — множество всех вполне непрерывных операторов из $[\mathscr{H}]$, а $\mathscr{C}_p$ $(0 < p < \infty)$ — идеалы Дж. Неймана и Р. Шаттена алгебры $[\mathscr{H}]$ (см., например, [2]).

Пусть $A_j \in \mathscr{C}_\infty$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда можно поставить вопрос о n-кратной полноте системы собственных и присоединенных элементов (сокращенно с. п. э.) пучка $A(\lambda)$. Относительно последнего понятия см. [2] и [3].

Сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема 1. *Пусть* $A_j \in \mathscr{C}_{p/j}$ $(0 < p < \infty;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $\ker A_n^* = \{0\}$. *Если* $A(\lambda)$ *является* π/p-*секториальным пучком, то система с. п. э. пучка* $A(\lambda)$ n-*кратно полна в пространстве* $\mathscr{H}$.

Сначала сделаем некоторые замечания.

1°. Из теоремы 1 при $n = 1$ получается известная теорема В. Б. Лидского. Эта теорема была доказана сначала в случаях $A \in \mathscr{C}_1$ и $A \in \mathscr{C}_2$ разными методами, а потом в общем случае $A \in \mathscr{C}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ [4], [2].

2°. Из доказательства будет видно, что эту теорему можно значительно усилить, потребовав π/p-секториальности пучка $A(\lambda)$ и $A_j \in \mathscr{C}_{p_j}$, $0 < p_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $p = \max_j \{jp_j\}$.

Доказательство теоремы 1. Как обычно, предположим противное. Тогда существует отличный от нуля вектор $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\} \in \underbrace{\mathscr{H} \oplus \ldots \oplus \mathscr{H}}_{n}$ такой, что вектор-функция $g(\lambda) \equiv A^{*-1}(\lambda)(f_0 + \lambda f_1 + \ldots + \lambda^{n-1} f_{n-1})$ является целой, где $A^*(\lambda) = [A(\bar{\lambda})]^*$ (см. [3]).

Так как $A(\lambda)$ — π/p-секториальный пучок, его числовой образ $W[A(\lambda)]$ расположен внутри непересекающихся углов $F_j \equiv \{\lambda : |\arg \lambda - \theta_j| \leqslant \pi/2p\}$. Пусть ε_0 — достаточно малое положительное число такое, что углы $\tilde{F}_j \equiv \{\lambda : |\arg(\lambda + \varepsilon_0 e^{i\theta_j}) - \theta_j| \leqslant \pi/2p\}$ не пересекаются с соседними углами F_k $(k \neq j)$ при $|\lambda| > \varepsilon_0$, кроме того, $W[A(\lambda)] \cap \{|\lambda| \leqslant \varepsilon_0\} = \phi$. Для оценки $\|g(\lambda)\|$ сформулируем следующую лемму.

Л е м м а 2. *Для достаточно больших по модулю* λ *таких, что* $1/\bar{\lambda} \notin \overline{W[A_c(\lambda)]}$, *имеет место оценка*

$$\|g(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left[d\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, W[A_c(\lambda)]\right)\right]^{-n},$$

где $M = \text{const} > 0$.

Нетрудное доказательство леммы 2 опускается.

При $\lambda \notin \bigcup_j \bar{F}_j$ и $|\lambda| > 1/\varepsilon_0$ по лемме 2 можно оценить $\|g(\lambda)\|$. Легко видеть, что

$$d(1/\bar{\lambda}, W[A_c(\lambda)]) = \frac{1}{|\lambda|^2} d(\lambda, W[A_c(\lambda)]),$$

поэтому $\|g(\lambda)\| \leqslant M|\lambda|^{2n-1}[d(\lambda, W[A_c(\lambda)])]^{-n}$. С другой стороны,

$$d(\lambda, W[A_c(\lambda)]) \geqslant \varepsilon_0 \sin\frac{\pi}{2p}.$$

Итак, для $\|g(\lambda)\|$ получаем следующую окончательную оценку:

$$\|g(\lambda)\| \leqslant M\left(\varepsilon_0 \sin\frac{\pi}{2p}\right)^{-n} |\lambda|^{2n-1}$$

(правая часть имеет смысл, поскольку $p > 1/2$ ввиду π/p-секториальности пучка $A(\lambda)$).

Теперь будем учитывать порядок и тип целой вектор-функции $g(\lambda)$. М. Г. Гасымовым [1] замечен тот факт, что если $A_j \in \mathscr{C}_{p_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то $g(\lambda)$ имеет порядок, не больший $p \equiv \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{jp_j\}$, и минимальный тип при порядке p. Отсюда выводится, что в условиях теоремы 1 $g(\lambda)$ — порядка, не большего p, и минимального типа при порядке p. Ссылаясь на теорему Фрагмена — Линделефа, заключаем, что $g(\lambda)$ есть вектор-полином степени не выше $2n - 1$, т. е. $g(\lambda) = g_0 + \lambda g_1 + \ldots + \lambda^{2n-1} g_{2n-1}$. Тогда

$$A^*(\lambda) g(\lambda) = f_0 + \lambda f_1 + \ldots + \lambda^{n-1} f_{n-1}.$$

Приравнивая коэффициенты обеих сторон при одинаковых степенях λ и учитывая условие $\ker A_n^* = \{0\}$, получим, что $g_0 = g_1 = \ldots = g_{2n-1} = 0$, и, следовательно, $f_0 = f_1 = \ldots = f_{n-1} = 0$, значит, противное предположение ошибочно. Теорема 1 доказана.

Заслуживают отдельного рассмотрения конкретные классы θ-секториальных пучков. Из-за нехватки места мы приведем в качестве следствия теоремы 1 лишь следующее

П р е д л о ж е н и е. *Пусть квадратичный пучок* $A_2(\lambda) = I + \lambda B + \lambda^2 C$, $B = B^*$, $C > 0$, *«равномерно эллиптичен», т. е.* $(B\varphi, \varphi)^2 \leqslant \varkappa^2 (C\varphi, \varphi)$, $0 < \varkappa < 2$, $\varphi \in S_1$. *Тогда, если* $B \in \mathscr{C}_{\pi/\theta}$ *и* $C \in \mathscr{C}_{\pi/2\theta}$, *где* $\theta = 2 \arcsin\frac{\varkappa}{2}$, *то система с. п. э. пучка* $A_2(\lambda)$ *двукратно полна в пространстве* $\mathscr{H}$.

Заметим, что при более жестких условиях $B^2 \leqslant \varkappa^2 C$ вместо условия равномерной эллиптичности и $\varkappa \leqslant 1$ это предложение установлено М. Г. Крейном и Г. К. Лангером [5].

§ 3. θ-секториальные операторные пучки

1. Во втором параграфе изучен класс пучков $A(\lambda)$ с коэффициентами $A_j \in \mathscr{C}_{p/j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и числовым образом $W[A(\lambda)]$, который состоит из углов раствора, не большего π/p. Чем больше p, тем у́же раствор этих углов. В этом параграфе мы займемся «сужением» $W[A(\lambda)]$ за счет

«расширения» класса $\mathscr{C}_{p/j}$. Нас будет интересовать следующий вопрос: верен ли аналог теоремы 1, если числовой образ $W[A(\lambda)]$ лежит на лучах, выходящих из начала координат, а операторы A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) являются вполне непрерывными? Образно выражаясь, является ли предел при $p \to \infty$ теоремы 1 опять теоремой?

Такие пучки $A(\lambda)$ назовем 0-*секториальными.*

Теорема 2. *Пусть* $A_j \in \mathscr{C}_\infty$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) *и* $\ker A_n^* = \{0\}$. *Тогда система с. п. э. 0-секториального пучка* $A(\lambda)$ *является n-кратно полной в пространстве* $\mathscr{H}$.

Замечание. Можно сказать, что 0-секториальные пучки являются аналогами в известном смысле вполне непрерывных самосопряженных операторов.

2. Доказательство теоремы 2. Ввиду 0-секториальности пучка $A(\lambda)$, его числовой образ $W[A(\lambda)]$ находится на лучах $\Lambda_j \equiv \equiv \{\lambda: \arg \lambda = \theta_j\}$. Предположим противное. Пусть r_0 — достаточно большое положительное число. Если $|\lambda| > r_0$ и $\lambda \notin \bigcup_j \Lambda_j$, то по лемме 2 можем написать
$$\|g(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left[d\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, \quad W[A_c(\lambda)]\right)\right]^{-n} = \frac{M}{|\lambda|}\left[\min_j d\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, \Lambda_j\right)\right]^{-n} =$$
$$= M|\lambda|^{n-1}\left[\min_j |\sin(\theta - \theta_j)|\right]^{-n},$$
где $\theta = \arg\lambda$. Отсюда нетрудно видеть, что имеет место неравенство
$$\left|\prod_j \sin(\theta - \theta_j)\right|^n \|g(\lambda)\| \leqslant M|\lambda|^{n-1}.$$
Очевидно, эта оценка справедлива для всех $|\lambda| > r_0$. Остается применить к вектор-функции $g(\lambda)$ обобщенную лемму Стоуна (см. [6]), из которой вытекает, что $g(\lambda)$ является вектор-полиномом степени не выше $n - 1$. Опираясь на условие $\ker A_n^* = \{0\}$, завершим доказательство теоремы 2.

Автор благодарен А. Г. Костюченко и М. Г. Гасымову за обсуждение полученных результатов.

Замечание при корректуре. Приношу благодарность Дж. Э. Аллахвердиеву, обратившему мое внимание на его работу (ДАН СССР 186, № 4 (1969), 743—746), где содержится результат о порядке целых функций, подобных $g(\lambda)$ из § 2, в общих ситуациях.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 12 июля 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М. Г., О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков, Изв. АН Арм. ССР, Математика VI, № 2—3 (1971), 131—147.
2. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1965.
3. Келдыш М. В., О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов, УМН XXVI, вып. 4 (1971), 15—41.
4. Келдыш М. В. и Лидский В. Б., Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов, Труды IV Всесоюзного матем. съезда, т. 1 (1963), 101—120.
5. Крейн М. Г. и Лангер Г. К., О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, М., «Наука», 1965, 283—322.
6. Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.
7. Stone M., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. 15 (1932).